1. Todo
2. Un corrigé est joint. Il n'est pas de moi, et vous pourrez noter quelques passages « que j'aurais rédigé autrement », en particulier les récurrences, et en particulier la question II.A.1). Des arguments (que vous ignorez) concernant les séries entières sont en partie évitables (lemme d'Abel, remplaçable par une simple convergence absolue), mais d'autres non (typiquement : unicité du développement en série entière) : ça permettra à ceux qui ont arnaqué ou ont été coincés de voir en situation réelle la mise en place d'arguments plus élaborés que ce dont ils disposent à ce moment de l'année.
3. (a) L'ensemble I des entiers $k > 0$ tels que $g^k = 0$ est non vide (il contient N) donc possède un plus petit élément, qu'on va appeler r. On a alors $r > 0$ (puisque $g^0 = \mathrm{Id}_E \neq 0$). On a alors par définition $g^r = 0$ (puisque $r \in I$) et $g^{r-1} \neq 0$ (puisque $r - 1 \notin I$: r est le minimum),

   $$\boxed{\text{et c'est gagné.}}$$

   (b) C'est un classique :
   — à comprendre ;
   — à savoir montrer ;
   — à savoir montrer de façon efficace/élégante si possible.
   Il s'agit évidemment (oui, n'est-ce pas ?) de partir d'une combinaison linéaire nulle

   $$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 g(x_0) + \cdots + \lambda_{r-1} g^{r-1}(x_0) = 0$$

   et on va montrer que tous les λ_i sont nuls. *On note dès maintenant que de mauvais choix d'indices – par exemple commençant par 1 – vous place directement sur l'autoroute de la lose !*
   — Compréhension de ce qui se passe : en appliquant g^{r-1} à la combinaison linéaire initiale on obtient $\lambda_0 g^{r-1}(x_0) = 0$ (les autres termes disparaissent puisque $g^r = 0$), or $g^{r-1}(x_0) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$. On reprend alors la combinaison linéaire initiale et on applique g^{r-2}, qui nous donne $\lambda_1 g^{r-1}(x_0) = 0$ puis $\lambda_1 = 0$.

   $$\boxed{\text{« Et cætera »}}$$

   — Rédaction propre : attention, ce qui se cache dans le « etc » n'est certainement pas une *récurrence immédiate*, mais une *récurrence avec prédécesseurs*, puisque pour montrer que $\lambda_5 = 0$ on va appliquer u^{r-6} à la combinaison linéaire initiale, en utilisant que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_4 = 0$, et non uniquement $\lambda_4 = 0$.
   Si on est pressé, on peut annoncer quelque chose comme : on montrerait par récurrence avec prédécesseurs la proposition « $\lambda_i = 0$ ». Mais seulement après avoir montrée $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$.
   — Rédaction rapide, élégante et inattaquable : on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'au moins un scalaire λ_i non nul, et on prend i_0 le plus petit indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. En appliquant g^{r-1-i_0} à la combinaison linéaire initiale on obtient $\lambda_{i_0} g^{r-1}(x_0) = 0$, puis $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui nous fournit la contradiction recherchée.

   (c) On sait que dans un espace de dimension finie égale à n les familles libres ont un cardinal majoré par n (typiquement on sait bien qu'en dimension 2 toute famille de cardinal 3 est liée), ce qui donne le résultat demandé puisqu'on a explicité une famille libre de cardinal r.

   $$\boxed{r \leqslant \dim(E)}$$

4. Comme on sait lire une matrice, on sait qu'on cherche une famille (e_1, e_2, e_3) :
   — qui constitue une base de E ;
   — telle que $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = e_2$.
   Ça y est l'essentiel de l'exercice est derrière nous. On sait qu'il existe x_0 tel que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E. Il est alors suffisant de prendre $e_1 = f^2(x_0)$, $e_2 = f(x_0)$ et $e_3 = x_0$,

   $$\boxed{\text{n'est-il pas ?}}$$