À rendre le mardi 26 septembre 2023 dernier délai.

1 Des approximations de π (d'après CCP TSI 2015)

On se propose d'exprimer π comme somme de différentes séries, puis d'estimer la vitesse de convergence des sommes partielles vers π.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer :
$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$
On pourra travailler, pour $t \in \mathbb{R}$, sur $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$...
2. Prouver que pour $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Prouver :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$
OUI, il y a bien deux choses à faire...
4. Expliciter (en justifiant !) un entier N_1 tel que
$$\left| \pi - 4 \sum_{k=0}^{N_1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leqslant \frac{1}{10^7}.$$
5. À l'aide des deux premières questions, déterminer une série $\sum \alpha_n$ de somme $\dfrac{\pi}{6}$.
On évitera les petites blagues du type $\alpha_n = \dfrac{4}{6} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ ou encore $\alpha_n = \begin{cases} \frac{\pi}{6} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
6. Expliciter N_2 tel que
$$\left| \pi - 6 \sum_{k=0}^{N_2} \alpha_k \right| \leqslant \frac{1}{10^7}.$$
Comparer N_2 à N_1.
7. Donner, en utilisant ce qui précède (et votre calculatrice !), une valeur approchée de π à 10^{-7} près.
On pourra écrire quelques lignes de Python (et les exécuter) fournissant le résultat.

TSVP

2 Nilpotents d'indice 2 en dimension 3

Dans tout l'exercice, l'espace E dans lequel on travaille est de dimension 3. On s'intéresse aux $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $v \neq 0$ et $v^2 = 0$.

1. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ possède pour matrice dans une base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$:

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer le rang de u.

   (b) Après avoir écrit des petits machins en haut et à droite de la matrice précédente, donner une base du noyau puis de l'image de u.
   On notera que quand $u(m) = 0$ on obtient quelqu'un dans le noyau et que lorsque $u(m) = b$, ce n'est pas m qui est dans l'image...

   (c) Faire un dessin où on voit tout ce beau monde (les f_i, l'image et le noyau).

2. À partir de maintenant, v est un endomorphisme de E non nul, et tel que $v^2 = 0$.

   (a) Justifier : $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(v)$. À l'aide du théorème du rang, en déduire les dimensions du noyau et de l'image de v.

   (b) Construire une base de E telle que la matrice de v dans cette base vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On partira de e_3 en dehors du noyau, on construira e_1 et e_2 de façon adéquate, on vérifiera que (e_1, e_2, e_3) est effectivement une base de E... et on pourra conclure sans mal.

   (c) On suppose ici que $w \in \mathcal{L}(E)$ vérifie : $w^3 = v$.
   Montrer : $w^9 = 0$, puis : $w^3 = 0$. Que conclure ?

   (d) On cherche les $z \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $z^2 = v$ (équation qu'on ne suppose pas vérifiée par défaut, BIEN ENTENDU : vous savez que « je cherche » ne signifie pas « je dispose de »...).

      i. Montrer que si on a effectivement $z^2 = v$, alors v et z commutent, puis que $\operatorname{Ker}(v)$ et $\operatorname{Im}(v)$ sont stables par z. En déduire la forme nécessaire de la matrice de z dans une base adaptée.

      ii. Déterminer tous les endomorphismes z de E vérifiant $z^2 = v$.