# 1 Des approximations de $\pi$ (d'après CCP TSI 2015)

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, $-t^2 \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}$$

ou encore :

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{(t^2)^{n+1}}{1+t^2}\cdot$$

Cette relation étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut l'intégrer entre 0 et un réel $x$ fixé (les fonctions en jeu sont bien continues...) pour obtenir... TADAM : le résultat demandé !

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt.}$$

2. Soit $x \in [0,1]$. Pour $t \in [0,x]$, on a d'une part $0 \leqslant t^{2n+2} \leqslant x^{2n+2}$ et d'autre part $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, donc (on aura noté le soin pris pour avec les signes...) : $0 \leqslant \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant x^{2n+2}$. En intégrant cette inégalité (entre fonctions continues...) sur $[0,x]$ (et on a noté que $0 \leqslant x$, donc l'intégrale « est dans le bon sens ») :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^x t^{2n+2}dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et le théorème d'encadrement/des gendarmes permet de conclure.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,1],\ \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

3. En reprenant pour $x = 1$ la relation établie dans la première question, on voit que d'une part la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ **est convergente** (ce qu'on aurait pu établir via le théorème spécial sur les séries alternées) et que d'autre part sa somme vaut $\operatorname{Arctan}(1)$ :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\cdot}$$

4. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$\delta_n = \left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right|\cdot$$

Si on utilise le contrôle du reste des séries alternées dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\delta_n| \leqslant \frac{1}{2n+3}\cdot$$

Mais on peut aussi choisir de reprendre la relation de la première question et la majoration de la deuxième, qui donne pour $x = 1$ :

$$|\delta_n| = \left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \leqslant \frac{1}{2n+3},$$

c'est-à-dire la même inégalité ! Puisqu'on veut $|4\delta_n| \leqslant \dfrac{1}{10^7}$, il SUFFIT d'avoir $2n+3 \geqslant 4.10^7$, et pour cela il SUFFIT de prendre $n = 2\times 10^7$.

$$\boxed{\text{En prenant } N_1 = 20\ 000\ 000, \text{ on a } \left|\pi - 4\sum_{k=0}^{N_1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{10^7}.}$$

5. On applique bien entendu les deux premières questions à $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (dont l'arctangente vaut $\dfrac{\pi}{6}$ pour obtenir (après nettoyage) :

$$\boxed{\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}.}$$

6. On obtient cette fois (majoration du reste d'une série alternée dont le terme général gnagna... ou utilisation de l'expression intégrale du reste) pour $n \geqslant 1$ :

$$\left|\frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}\right| \leqslant \frac{1}{(2n+3)\sqrt{3}3^{n+1}} \leqslant \frac{1}{6\times 3^n}.$$

*Oui, j'ai grossièrement minoré au dénominateur $2n+3$ par 2 et $\sqrt{3}$ par 1 : on ne perd pas grand chose en précision (le $3^n$ écrasant tout sur son passage) et on gagne beaucoup en simplicité de majorant.*

Pour que (six fois) cette différence soit majorée par $10^{-7}$, il *suffit* que $3^n \geqslant 10^7$, c'est-à-dire $n \geqslant 7\dfrac{\ln 10}{\ln 3} \simeq 14,7$

$$\boxed{\text{En prenant } N_2 = 15 \text{ on a } \left|\pi - 6\sum_{k=0}^{N_2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k\sqrt{3}}\right| \leqslant \frac{1}{10^7}.}$$

Et bien entendu :

$$\boxed{N_2 = 15 \text{ est violemment plus petit que } N_1 = 20\ 000\ 000...}$$

7. Vous connaissez ma calculatrice...

```
def somme1(n):
    return sum((-1)**k/(2*k+1) for k in range(n+1))

def somme2(n):
    return 1/sqrt(3)*sum((-1)**k/(3**k*(2*k+1)) for k in range(n+1))

N2 = int(7*log(10) / log(3)) + 1


>>> 4*somme1(10**3), 4*somme1(2*10**7)
(3.1425916543395442, 3.141592703589858) # après un lonnnnnng calcul
>>> 6*somme2(15), pi
(3.141592651733998, 3.141592653589793)  # instantané
```

## 2 Nilpotents d'indice 2 en dimension 3

1. (a) Le rang de $u$ est celui de sa matrice le représentant dans n'importe quelle base... et celle dans $\mathcal{F}$ a clairement comme rang 1 (exactement une colonne non nulle)

$$\boxed{\mathrm{rg}(u) = 1}$$

   (b) L'image de $u$ est de dimension 1 et contient $u(f_3) = f_1$. De même, le noyau de $u$ a pour dimension (théorème du rang) $3-1 = 2$ et contient $f_1$ et $f_2$ (d'après les deux premières colonnes de la matrice). Comme $(f_1, f_2)$ est libre :

$$\boxed{\text{Ker}\,(u) \text{ et } \text{Im}\,(u) \text{ possèdent comme bases respectives } (f_1, f_2) \text{ et } (f_1).}$$

*Et on note que l'image est incluse dans le noyau.*

(c) On respecte des informations collectées précédemment :

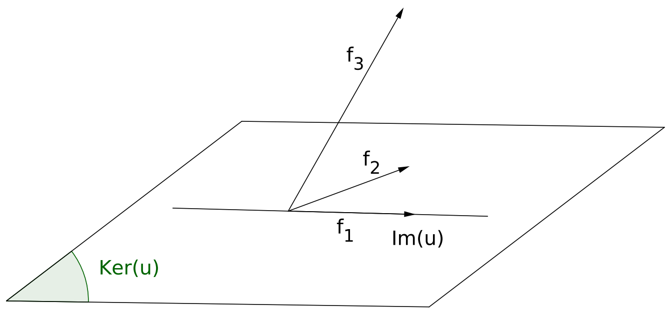


FIGURE 1 – La géométrie du problème

2. (a) D'une manière générale, $g \circ f = 0$ est équivalent à $\text{Im}\,(f) \subset \text{Ker}\,(g)$, ce qui donne le résultat ici avec $f = g = v$.

$$\boxed{\text{Im}\,(v) \subset \text{Ker}\,(v).}$$

*Pour les sceptiques, montrons l'implication utilisée dans le résultat cité plus haut en supposant* $g \circ f = 0$ *: tout habitant* $y$ *de* $\text{Im}\,(f)$ *s'écrit* $f(x)$ *pour un certain* $x \in E$ *; on a alors* $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$*, donc* $y$ *est bien dans le noyau de* $g$*.*

Le théorème du rang nous dit que la somme des dimensions de l'image et du noyau vaut 3. L'inclusion précédente ne laisse qu'une possibilité (sachant que $\text{Im}\,(v)$ n'est pas réduit à $\{0\}$) :

$$\boxed{\text{Im}\,(v) \text{ est de dimension 1, et } \text{Ker}\,(v) \text{ est de dimension 2.}}$$

(b) Fixons $e_3$ en dehors du noyau (c'est possible car $v \neq 0$). On définit alors $e_1 = v(e_3)$. On a alors $e_1$ qui est non nul (car $e_3 \notin \text{Ker}\,(v)$) et qui appartient au noyau de $v$ (car $v(e_1) = v(v(e_3)) = v^2(e_3) = 0$). En tant que famille libre du noyau, on peut le compléter en une base de $\text{Ker}\,(v)$ à l'aide d'un vecteur (on sait que $\text{Ker}\,(v)$ est de dimension 2) ; notons $e_2$ ce vecteur, et montrons que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $E$.

Il suffit de montrer la liberté (famille de 3 vecteurs en dimension 3) ; supposons donc : $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. En appliquant $v$, on obtient $\gamma v(e_3) = 0$ (les deux autres vecteurs sont dans le noyau de $v$) ; or $v(e_3) \neq 0$, donc $\gamma = 0$. Maintenant, $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, or $(e_1, e_2)$ est libre en tant que base de $\text{Ker}\,(v)$. Ainsi, $\alpha = \beta = 0$, et la famille $(e_1, e_2, e_3)$ est bien libre, puis constitue une base de $E$.

Par construction, la matrice de $v$ dans cette base est exactement celle recherchée ($e_1$ et $e_2$ sont dans le noyau, et $e_3$ est envoyé sur $e_1$) :

$$\boxed{\text{Mat}(v, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(c) Tout d'abord : $w^9 = (w^3)^3 = v^3 = 0$. Ainsi, $w$ est un endomorphisme nilpotent. On sait alors que son indice de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace ambiant, à savoir 3. Ceci impose : $w^3 = 0$.

Bizarre : on a aussi $w^3 = v \neq 0$, ce qui est absurde !

$$\boxed{\text{L'énoncé travaillait avec un } \textit{hypothétique } w \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } w^3 = u\text{... donc un tel } w \text{ n'existe pas !}}$$

*Établissons rapidement le résultat admis dans cette question, en notant* $p$ *l'indice de nilpotence. Puisque* $v^{p-1} \neq 0$*, il existe* $x_0$ *tel que* $v^{p-1}(x_0) \neq 0$ *; on montre alors classiquement que* $(x_0, v(x_0), ..., v^{p-1}(x_0))$ *est libre. Et puisqu'elle est de cardinal* $p$*, l'espace ambiant est de dimension au moins* $p$*.*

(d) i. Si $z^2 = v$, alors $v \circ z = z^2 \circ z = z^3 = z \circ z^2 = z \circ v$. La suite est quasiment un résultat de cours : si $x \in \mathrm{Ker}\,(v)$ alors $v(z(x)) = z(v(x)) = z(0) = 0$ donc $z(x) \in \mathrm{Ker}\,(v)$, ce qui prouve la stabilité de $\mathrm{Ker}\,(v)$ par $z$. C'est légèrement différent mais du même niveau pour l'image (et ici, je n'accepterais pas les « de même » : images et noyaux sont vraiment de natures différentes). Fixons donc $y \in \mathrm{Im}\,(v)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On a alors $z(y) = z(v(x)) = v(z(x))$ donc $z(y) \in \mathrm{Im}\,(v)$, et $\mathrm{Im}\,(v)$ est bien stable par $z$.

$$\boxed{v \text{ et } z \text{ commutent, ce dont on déduit que } \mathrm{Im}\,(v) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(v) \text{ sont stables par } z.}$$

Des bases de l'image et du noyau de $v$ étant connues, on sait que $z(e_1)$ doit appartenir à l'image, donc est de la forme $\alpha e_1$. De même pour $z(e_2)$, qui appartient à $\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } z^2 = v, \text{ alors } \mathrm{Mat}(z, \mathcal{E}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \alpha & \times & \times \\ 0 & \beta & \times \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}$$

ii. Poussons l'analyse plus loin : si $z^2 = v$, alors non seulement la matrice de $z$ dans $\mathcal{E}$ est de la forme précédente, mais son carré vaut $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{E})$, donc en regardant les éléments diagonaux, on voit que $\mathrm{Mat}(z, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut alors lancer l'analyse en prenant une telle matrice et en la mettant au carré cette matrice : on voit qu'on trouve la matrice de $v$ dans $\mathcal{E}$ si et seulement si $ac = 1$ (sans condition sur $b$).

$$\boxed{z^2 = v \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}(z, \mathcal{E}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*.}$$