De la réduction sans le cours

1 Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

1. $\mathrm{Mat}(u-2\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (deux colonnes/lignes proportionnelles, ou un tour de pivot), donc est non inversible, donc $u-2\mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective donc pas injective. Plus précisément, le noyau de $u-2\mathrm{Id}_E$ est de dimension $2-1=1$, et contient visiblement $f_1=(-4,1)$ puisque $\begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (autre point de vue : la matrice de $v=u-2\mathrm{Id}_E$ dans la base $\mathcal{E}$ nous indique que $v(e_2)=4v(e_1)$, donc $v(e_2-4e_1)=0$... et si on ne voit vraiment rien, on résout $(A-2I_2)X=0$).

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id}_E)=\mathbb{R}f_1,\text{ avec } f_2=(-4,1).}$$

2. De la même façon, $\mathrm{Mat}(u+3\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 20 & 60 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u+3\mathrm{Id}_E)=\mathbb{R}f_2,\text{ avec } f_2=(-3,1).}$$

3. $\mathcal{F}=(f_1,f_2)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires) dans E qui est de dimension 2, donc c'est une base de E. Par ailleurs, $f_1\in\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id}_E)$, donc $u(f_1)=2f_1$, et de même, $u(f_2)=-3f_2$. Ainsi :

$$\boxed{D=\mathrm{Mat}(u,\mathcal{F})=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

4. P est par définition la matrice représentant les coordonnées de f_1 et f_2 dans la base $\mathcal{E}$, et donc :

$$\boxed{P=\underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

5. On est exactement dans le cadre du théorème de changement de base :

$$\begin{array}{ccc} E,\mathcal{E} & \xrightarrow[A]{u} & E,\mathcal{E} \\ {\scriptstyle Id_E}\uparrow{\scriptstyle P} & & {\scriptstyle Id_E}\downarrow{\scriptstyle P^{-1}} \\ E,\mathcal{F} & \xrightarrow[D]{u} & E,\mathcal{F} \end{array}$$

$A=\mathrm{Mat}(u,\mathcal{E})$, $D=\mathrm{Mat}(u,\mathcal{F})$, et $P=\underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}$, donc $D=P^{-1}.A.P$, ou encore :

$$\boxed{A=P.D.P^{-1}}$$

6. $P^{-1}=\underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}}$ est la matrice représentant les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{F}$. Or $f_1-f_2=-e_1$, donc $e_1=-f_1+f_2$. Mais $f_1=-4e_1+e_2$, donc $e_2=f_1+4e_1=-3f_1+4f_2$, et ainsi :

$$\boxed{P^{-1}=\underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}}=\mathrm{Mat}\left((e_1,e_2),\mathcal{F}\right)=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

2 Quatre applications

1. (a) On a sans problème $D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$, puis par récurrence immédiate[1] :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}}$$

(b) On peut commencer par observer :

$$A^2 = P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^2.P^{-1}; \quad A^3 = P.D^2.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^3.P^{-1}$$

puis montrer par une récurrence (qu'on peut encore déclarer immédiate) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P.D^n.P^{-1}.}$$

Un autre point de vue plus direct consistait à voir que $A^n = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E})^n$, $D^n = \mathrm{Mat}(u^n, \mathcal{F})$, *et* $P = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}$, *donc d'après la formule de changement de base,* $D^n = P^{-1}.A^n.P$, *ou encore :* $A^n = P.D^n.P^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
E, \mathcal{E} \arrow[r, "u^n", "A^n"'] & E, \mathcal{E} \arrow[d, "Id_E"', "P^{-1}"] \\
E, \mathcal{F} \arrow[u, "Id_E", "P"'] \arrow[r, "u^n", "D^n"'] & E, \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

(c) Il n'y a plus qu'à recoller les morceaux :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 4.2^n - 3(-3)^n & -12.2^{''} - 12(-3)^n \\ -2^n + (-3)^n & -3.2^n + 4(-3)^n \end{pmatrix}}$$

2. (a) Si $u \circ v = v \circ u$, alors les matrices dans la base $\mathcal{E}$ de $u \circ v$ et de $v \circ u$ sont égales, donc $AB = BA$. Réciproquement, si $AB = BA$, alors $\mathrm{Mat}(u \circ v, \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(v \circ u, \mathcal{E})$, et *l'injectivité* de $w \mapsto \mathrm{Mat}(w, \mathcal{E})$ nous assure que $u \circ v = v \circ u$;

$$\boxed{\text{ce qui prouve l'équivalence demandée.}}$$

(b) (f_1, f_2) constitue une base E. On sait alors que si on la casse en deux, les deux sous-espaces engendrés constituent deux sous-espaces supplémentaires, ce qui nous donne ici directement le résultat souhaité :

$$\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$$

(c) Supposons d'abord : $u \circ v = v \circ u$. Pour montrer que E_1 est stable par v, fixons $f \in E_1$, et montrons que $v(f) \in E_1$, c'est-à-dire : $v(f) \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}_E)$. On calcule pour cela :

$$u\,(v(f)) = u \circ v(f) = v \circ u(f) = v\,(u(f)) = v(2f) = 2v(f),$$

et ainsi, $v(f) \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}_E)$, ce qu'il fallait démontrer. La stabilité de E_2 par v se traite de façon identique.

Supposons maintenant que E_1 et E_2 sont stables par v, et montrons que $u \circ v = v \circ u$. On fixe pour cela $x \in E$: il peut se décomposer (d'après la question précédente) $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On a alors $u(x_1) = 2x_1$, mais $v(x_1) \in E_1$, donc on a aussi $u\,(v(x_1)) = 2v(x_1)$, avec des relations similaires pour x_2. Ainsi :

$$u \circ v(x) = u\,(v(x_1 + x_2)) = u\,(v(x_1) + v(x_2)) = u\,(v(x_1)) + u\,(v(x_2)) = 2v(x_1) - 3v(x_2) = v(2x_1 - 3x_2)$$

alors que :

$$v \circ u(x) = v\,(u(x_1 + x_2)) = v\,(u(x_1) + u(x_2)) = v(2x_1 - 3x_2).$$

On a bien montré que pour tout $x \in E$, $u \circ v(x) = v \circ u(x)$. ∎

1. Allez, je vous l'accorde !

$$\boxed{u\circ v=v\circ u \text{ si et seulement si } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont stables par } v.}$$

(d) $E_1=\mathrm{Vect}(f_1)$, donc la stabilité de E_1 par v se traduit par le fait que $v(f_1)\in E_1$, c'est-à-dire l'existence de $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $v(f_1)=\lambda f_1$. Le même raisonnement s'applique évidemment pour f_2, et ainsi : $u\circ v=v\circ u$ si et seulement s'il existe deux scalaires λ et μ tels que : $\mathrm{Mat}(v,\mathcal{F})=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$.

$$\boxed{u\circ v=v\circ u \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}(v,\mathcal{F}) \text{ est diagonale.}}$$

(e) Il est clair que deux matrices diagonales commutent. Si B est de la forme PD_1P^{-1}, avec D_1 diagonale, on a donc :

$$AB=P.D.P^{-1}.P.D_1.P^{-1}=P.DD_1.P^{-1}=P.D_1D.P^{-1}=P.D_1.P^{-1}.P.D.P^{-1}=BA.$$

Réciproquement, supposons : $AB=BA$. On a alors $u\circ v=v\circ u$. Mais alors, $\mathrm{Mat}(v,\mathcal{F})$ est diagonale d'après de qui précède. Notons-la D_1 : la formule de changement de base nous donne $\mathrm{Mat}(v,\mathcal{E})=P.\mathrm{Mat}(v,\mathcal{F}).P^{-1}$, c'est-à-dire $B=P.D_1.P^{-1}$. ■

$$\boxed{B \text{ commute avec } A \text{ si et seulement si } B \text{ est de la forme } PD_1P^{-1}, \text{ avec } D_1 \text{ diagonale.}}$$

Pour la réciproque, le point de vue expliqué rapidement au détour d'un TD était celui élémentaire du calcul : si $AB=BA$, alors en notant $B'=P^{-1}BP$ on a $B'D=...=DB'$, donc B' commute avec la matrice diagonale à éléments diagonaux distincts D, et un calcul simple de $B'D-DB'$ montre que B' est diagonale.

(f) Il est clair que si $B=\lambda A+\mu I_2$, alors $AB=BA$ (ben oui : calculer l'un et l'autre !).
Réciproquement, supposons $AB=BA$. On a alors $B=P.D_1.P^{-1}$, avec D_1 de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$. Si on a bien compris que par deux points, on peut toujours faire passer une droite(!), ou bien en résolvant un bien difficile système $(2,2)$ ou invoquer Lagrange et ses polynômes d'interpolation... on peut affirmer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $2\lambda+\mu=\alpha$ et $-3\lambda+\mu=\beta$. On a alors $\lambda D+\mu I_2=D_1$, donc :

$$B=P.D_1.P^{-1}=P\left(\lambda D+\mu I_2\right)P^{-1}=\lambda P.D.P^{1}+\mu P.P^{-1}=\lambda A+\mu I_2.$$

$$\boxed{B \text{ commute avec } A \text{ si et seulement si } B \text{ est de la forme } \lambda A+\mu I_2.}$$

3. (a) Sans problème :

$$\begin{aligned}
(x,y)\text{ vérifie }(\mathcal{D}) &\iff \forall t\in\mathbb{R},\quad X'(t)=AX(t)\\
&\iff \forall t\in\mathbb{R},\quad X'(t)=P.D.P^{-1}X(t)\\
&\iff \forall t\in\mathbb{R},\quad P^{-1}X'(t)=D.P^{-1}X(t)\\
&\iff \forall t\in\mathbb{R},\quad X_1'(t)=D.X_1(t)\\
&\iff \forall t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}x_1'(t)=2x_1(t)\\ y_1'(t)=-3y_1(t)\end{cases}\qquad(\mathcal{D}')
\end{aligned}$$

Le lecteur est prié de se convaincre de ces **équivalences** *autrement que « ben oui ceci implique bien cela, puisqu'il le dit ».*
Ce système est en effet considérablement plus simple : il n'y a plus de dépendances mutuelles.

(b) Si on en croit le programme de terminale, le système $(\mathcal{D}')$ est équivalent à l'existence de deux réels α et β tels que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x_1(t)=\alpha\mathrm{e}^{2t}$ et $y_1(t)=\beta\mathrm{e}^{-3t}$. Mais $X=PX_1$, donc :

$$\boxed{(x,y)\text{ vérifie }(\mathcal{D})\qquad\iff\qquad\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R};\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x(t) &= -4\alpha\mathrm{e}^{2t}-3\beta\mathrm{e}^{-3t}\\ y(t) &= \alpha\mathrm{e}^{2t}+\beta\mathrm{e}^{-3t}\end{cases}}$$

(c) Le calcul de P^{-1} n'était pas nécessaire : à la fin, on a seulement eu besoin de : $X=PX_1$.

4. (a) Le principe est le même que plus haut : en notant $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $Z'_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = P^{-1}Z_n$:

$$\begin{aligned}
(u,v) \text{ vérifie } (\mathcal{R}) &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = AZ_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = P.D.P^{-1}Z_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{-1}Z_{n+1} = D.P^{-1}Z_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z'_{n+1} = D.Z'_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} U_{n+1} = 2U_n \\ V_{n+1} = -3V_n \end{cases} \qquad (\mathcal{R}')
\end{aligned}$$

(b) Si on fait cette fois confiance au programme de première, on peut affirmer que $(\mathcal{R}')$ est équivalente à l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha 2^n$ et $V_n = \beta(-3)^n$.

(c) D'après les équivalences précédentes, et puisque $Z_n = PZ'_n$:

$$\boxed{(u,v) \text{ vérifie } (\mathcal{R}) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = -4\alpha.2^n - 3\beta(-3)^n \\ v_n = \alpha.2^n + \beta(-3)^n \end{cases}}$$

3 Rejouons dans $\mathbb{R}^3$

1. On échange la première et la troisième ligne, pour avoir un gentil pivot :

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ -2 & -5-\lambda & 10 \\ -3-\lambda & -4 & 10 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -6+2\lambda \\ 0 & 8+4\lambda & \lambda^2-5\lambda-14 \end{pmatrix}$$

Dans la deuxième ligne, on peut factoriser $\lambda - 3$. Ainsi :

— Si $\lambda = 3$, alors le rang de $A - \lambda I_3$ est celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire 2

— Si $\lambda \neq 3$, alors le rang de $A - \lambda I_3$ est celui (après l'opération $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{3-\lambda}L_2$, qui conserve le rang) de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8+4\lambda & \lambda^2-5\lambda-14 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire (après l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (8+4\lambda)L_2$) celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, avec $d = \lambda^2 - 5\lambda - 14 + 2(8+4\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \{-1, -2\}$ alors $d \neq 0$, donc $A - \lambda I_3$ est de rang 3. Et si λ vaut -1 ou -2 alors $d = 0$, donc $A - \lambda I_3$ est de rang 2.

$$\boxed{\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{-2, -1, 3\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. Inspirés par la première partie de ce problème et les calculs précédents, on note u l'application linéaire canoniquement associée à A, et on cherche les noyaux de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$, avec $\lambda \in \{-2, -1, 3\}$. On sait déjà qu'ils sont de dimension $3 - 2 = 1$, donc ce sont des droites. Il suffit alors de trouver un élément non nul de chacun de ces noyaux...

— $\mathrm{Mat}(u+2\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = A+2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 10 \\ -2 & -3 & 10 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$, donc :

$$(x_1,x_2,x_3) \in \mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id}_E) \iff \begin{pmatrix} -1 & -4 & 10 \\ -2 & -3 & 10 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x_1 & - & 4x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \\ & & 5x_2 & - & 10x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -4x_2 + 10x_3 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Et ainsi (après un petit coup de $\mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id}_E) = \{... \mid ... \in ...\}$) :

$$\mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_1), \text{ avec } f_1 = (2,2,1).$$

— De même : $\mathrm{Mat}(u+\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = A+I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 \\ -2 & -4 & 10 \\ -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$, puis (left to the reader) :

$$\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_2), \text{ avec } f_2 = (1,2,1).$$

— Et enfin, $\mathrm{Mat}(u-3\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = A-3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ -2 & -8 & 10 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, puis :

$$\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_3), \text{ avec } f_3 = (1,1,1).$$

On montre ensuite que $\mathcal{F} = (f_1,f_2,f_3)$ est une base [2] de $\mathbb{R}^3$, en calculant le rang de cette famille, qui est aussi le rang de la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est celui de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, mais aussi celui de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce rang vaut donc 3 : $\mathcal{F}$ est alors génératrice, donc constitue une base de E. Mais par définition des f_i, on a $\mathrm{Mat}(u,\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$, et la formule de changement de base nous donne alors $A = P.D.P^{-1}$, ce qui était le résultat attendu.

$$\boxed{\text{En prenant } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}}$$

3. L'implication « $B = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 \Rightarrow AB = BA$ » est aussi évidente qu'une heure auparavant... Pour le sens non trivial, on suppose $AB = BA$ et on reprend le plan de la partie 3.2, en notant v l'endomorphisme canoniquement associé à $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
   (a) $AB = BA$ se traduit géométriquement par $u \circ v = v \circ u$.
   (b) De même, la relation $u \circ v = v \circ u$ implique que les droites engendrées par f_1, f_2 et f_3 sont stables par v, essentiellement car ces droites sont des noyaux de $u - \lambda\mathrm{Id}_E$. La réciproque est inutile ici, mais reste vrai parce que $\mathcal{F}$ est une base de E.
   (c) On en déduit que B est de la forme $P.D_1.P^{-1}$, avec D_1 une matrice diagonale.
   (d) Notant $D_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, il existe $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels qu'en posant $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, on ait $P(-2) = a$, $P(-1) = b$ et $P(3) = c$: c'est le théorème d'interpolation de Lagrange qui le

2. Nous saurons bientôt (cours sur la réduction) « qu'en tant que famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, elle est libre... »

dit... mais on peut le retrouver en résolvant un système à trois équations et trois inconnues (mouais... on va préférer Lagrange, non ?).
On a alors :

$$B = P.D_1.P^{-1} = P\left(\alpha D^2 + \beta D + \gamma I_3\right)P^{-1} = \alpha P.D^2.P^{-1} + \beta P.D.P^{-1} + \gamma P.P^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

■

4. Notant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel se traduit $X' = AX$, soit encore, en posant

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t) \ :$$

$X'1 = DX$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_1' & = & -2x_1 \\ y_1' & = & -y_1 \\ z_1' & = & 3z_1 \end{cases}$ ce qui est équivalent à l'existence de trois constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x_1(t) & = & \alpha \mathrm{e}^{-2t} \\ y_1(t) & = & \beta \mathrm{e}^{-t} \\ z_1(t) & = & \gamma \mathrm{e}^{3t} \end{cases}$. Les conditions initiales se traduisent $X_1(0) = P^{-1}X(0)$, ce qui permet d'obtenir directement $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ si on a calculé P^{-1} (ce qui n'est pas le cas ici, mais qui serait assez aisé). On va se contenter de résoudre le système $PX_1(0) = X(0)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \cdots \iff \begin{cases} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & -2 \\ \gamma & = & 5 \end{cases}$$

Le système différentiel proposé, avec les conditions initiales imposées, possède donc une unique solution :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = PX_1(t) = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{3t} \\ -2\mathrm{e}^{-2t} - 4\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}}$$

5. De façon assez originale, on note $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Z_n' = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = P^{-1}Z_n$: on a $Z_{n+1}' = D.Z_n'$, donc les suites U, V et W sont géométriques de raisons -2, -1 et 3. Les conditions initiales se traduisent par ailleurs $Z_0' = PZ_0$, soit encore $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, système qui a déjà été résolu ! On a donc $\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(-2)^n \\ -2(-1)^n \\ 5.3^n \end{pmatrix}$
Il existe donc un unique triplet de suites vérifiant les relations de récurrences et les conditions initiales de l'énoncé :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n' = PX_n = \begin{pmatrix} -2(-2)^n - 2(-1)^n + 5.3^n \\ -2(-2)^n - 4(-1)^n + 5.3^n \\ -(-2)^n - 2(-1)^n + 5.3^n \end{pmatrix}}$$

4 Un générateur automatique d'exercices

1. Pour inverser T_1, on peut la voir comme la matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}^3$, disons $T_1 = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}$. On a alors $T_1^{-1} = \underset{\mathcal{F} \to \mathcal{E}}{\mathrm{Pas}}$. Mais si on a bien compris comment on résout un système

triangulaire tel que

$$\begin{cases} e_1 & & & & & = f_1 \\ \alpha_{2,1}e_1 & + & e_2 & & & = f_2 \\ \alpha_{3,1}e_1 & + & \alpha_{3,2}e_2 & + & e_3 & = f_3 \\ & & & \ddots & & \\ \alpha_{n,1}e_1 & + & \cdots & \alpha_{n,n-1}e_{n-1} & + \quad e_n & = f_n \end{cases}$$

on est bien convaincu qu'on aura pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, e_k de la forme $f_k + \sum_{i<k} \beta_{k,i} f_i$ avec les $\beta_{k,i}$ entiers. Cela se prouverait par récurrence (avec prédécesseurs). On a ainsi :

$$\boxed{T_1^{-1} = \underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_{2,1} & \cdots & \beta_{n,1} \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \beta_{n,n-1} \\ 0 & & (0) & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).}$$

2. Prouvons ce résultat à la frontière du cours...
   On a $T_1.T_1^{-1} = I_n$, donc en transposant : ${}^t(T_1^{-1}){}^tT_1 = {}^tI_n = I_n$, et de même, $T_1^{-1}T_1 = I_n$ fournit ${}^tT_1{}^t(T_1^{-1}) = {}^tI_n = I_n$. Ainsi :

$$\boxed{{}^tT_1 \text{ est inversible, d'inverse } {}^t(T_1^{-1}).}$$

3. P est le produit de deux matrices inversibles, donc est inversible. Par ailleurs, $P^{-1} = (T_1T_2)^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1} = {}^t(T_1^{-1})T_1^{-1}$ est le produit de deux matrices à coefficients entiers d'après la question 1, donc est elle-même à coefficients entiers.

$$\boxed{P^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$$

4.
```
from numpy import *
T1 = array([[1, 2, -1], [0, 1, 1], [0, 0, 1]])
P = dot(T1, transpose(T1))
D = array([[5, 0, 0], [0, -4, 0], [0, 0, -2]])
C = dot(P, dot(D, linalg.inv(P)))
"""
>>> print P
[[ 6  1 -1]
 [ 1  2  1]
 [-1  1  1]]
>>> print C
[[  44.  -94.  140.]
 [  15.  -36.   49.]
 [  -3.    4.   -9.]]
>>> print(linalg.inv(P).dot(C).dot(P))
[[  5.00000000e+00   1.06581410e-14   1.06581410e-14]
 [  1.63424829e-13  -4.00000000e+00  -7.46069873e-14]
 [ -2.23820962e-13   4.61852778e-14  -2.00000000e+00]]
"""
```