

## Mathématiques 2

### Présentation du sujet

Le sujet de cette année propose essentiellement d'étudier le changement de variable  $X \mapsto X+1$  dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. La transformation  $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$  peut être connue de certains étudiants via l'exercice classique qui montre que les sommes de puissances  $k$ -ièmes  $\sum_{i=1}^n i^k$  sont des polynômes en  $n$  de degré  $k+1$ . Entre autres variations sur ce thème, le problème donne la classification des polynômes qui envoient  $\mathbb{Z}$  sur lui-même. Le sujet se termine sur une autre application : montrer que la fonction d'une variable réelle  $t \mapsto t^\alpha$  n'envoie  $\mathbb{N}$  dans lui-même que si  $\alpha$  est un entier.

### Analyse globale des résultats

L'algèbre linéaire élémentaire (noyaux, images, valeurs propres, théorème du rang) est sollicitée. Cette partie du programme d'algèbre est généralement la mieux maîtrisée. Les espaces considérés sont ici des espaces de polynômes mais cela n'a joué un rôle qu'à travers la présence des coefficients binomiaux  $\binom{n}{m}$  pour  $0 \leq m \leq n$  qui jouent un rôle central. De nombreuses questions sont très simples et demandent seulement l'application judicieuse des résultats du cours. Il fallait cependant faire preuve de soin dans l'expression des formules, en particulier au niveau de l'indexation. Une seule vraie lacune semble apparaître et concerne les problèmes de dénombrements (partie II).

La simplicité des questions a pu surprendre certains candidats qui sont habitués à des sujets de concours ne pouvant être traités dans le temps imparti et qui ont choisi de se concentrer sur la partie I. De nombreux candidats, qui paraissent capables au vu de ce qu'ils ont fait dans la partie I, auraient vraiment gagné à travailler aussi sur d'autres parties, la III en particulier.

### Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

#### Partie I

**I.A.2)** Dès cette question facile, beaucoup d'expressions maladroitement, telles que  $\tau^k(P(X+1))$ .

**I.A.3)** Beaucoup d'erreurs d'indexation à au moins un des deux indices. L'énoncé était clair sur le champ des indices de même que sur le fait que le coefficient binomial  $\binom{n}{m}$  n'est à priori défini que pour  $0 \leq m \leq n$ . Il convenait donc de préciser que la matrice  $M$  est nulle en dessous de la diagonale.

**I.A.4)** Quelques imprécisions habituelles sur le nombre de valeurs propres entendu avec multiplicités. Une bonne proportion de candidats applique avec succès le critère classique de diagonalisabilité d'après la dimension des espaces propres.

**I.A.5)** Beaucoup de candidats prouvent longuement l'injectivité de  $\tau$ . D'autres vont un peu trop vite en besogne et appellent  $\tau^{-1}$  leur proposition d'inverse pour  $\tau$ .

**I.A.6)** On relève ici les mêmes erreurs qu'en I.A.3.

**I.A.7)** Même remarque qu'en I.A.3. De plus la confusion entre  $Q$  et  $M$  a été fréquente — encore une question d'indices.

**I.A.8)** L'essentiel était ici de remarquer que  $M = {}^tQ$ , ce qui avait pu être noté à la question précédente.

**I.A.9)** Question facile généralement bien traitée.

**I.B.1)** Beaucoup d'erreurs dans le calcul du coefficient dominant, qui donne lieu à des formules souvent bien compliquées.

**I.B.2)** Il est ici classique de calculer d'abord le noyau puis d'appliquer le théorème du rang pour obtenir l'image à partir de l'inclusion évidente. Le théorème du rang est appliqué à bon escient par de très nombreux candidats. Notons toutefois, comme certains candidats l'ont fait, que l'image n'est pas difficile à déterminer au vu de la matrice  $M - I$ .

**I.B.3)** Il était plus naturel de déterminer l'image comme conséquence du cas  $k = 1$  et d'appliquer ensuite le théorème du rang pour obtenir le noyau. On a vu des démonstrations souvent inutilement longues.

**I.B.4)** Ici aussi beaucoup de candidats s'égarèrent dans des calculs très longs.

**I.B.5)** La confusion très fréquente entre les différents niveaux variable/fonction/opérateur a vraiment entraîné des erreurs. Ainsi de l'écriture erronée  $\delta^n(P(0))$  qui a parfois trompé le candidat lui-même. À l'inverse une bonne proportion de candidats a compris que tout se résumait à l'évaluation en 0 d'une égalité entrevue précédemment.

**I.B.6b)** Question souvent bien comprise.

**I.B.6c)** La plupart des candidats, même faibles par ailleurs, fait avec un certain succès une discussion de cas à partir des coefficients éventuels de  $A$ . Certains notent d'emblée la simplification entraînée par le fait que  $A$  et son carré commutent. D'autres enfin raisonnent sur l'ordre de nilpotence de  $A$ .

**I.B.6d)** On ne trouve que rarement une transcription matricielle correcte du fait que  $\mathbb{R}_1[X]$  est stable par  $u$  (et  $\delta$ ).

**I.B.7a)** La notion de famille de polynômes échelonnée en degrés est bien connue.

**I.B.7b)** Cette question a posé de gros problèmes aux candidats. La situation est celle d'une somme de sous-espaces pris dans une famille ordonnée pour l'inclusion (les  $\mathbb{R}_d[X]$ ,  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ). En pratique, quelques rares candidats ont pensé à prendre un polynôme de plus grand degré dans le sous-espace, ce degré n'étant pas, à priori, la dimension du sous-espace, contrairement ce qu'affirment certaines copies.

## Partie II

**II.A.2)** Le jury s'attendait à ce que cette question soit vraiment immédiate pour tous les candidats. Il n'en est rien.

**II.A.3)** Cette question est une variation non triviale de la précédente, certes, mais le taux d'échec est vraiment très élevé : seuls quelques dizaines de candidats savent faire ce dénombrement. Il y a une faiblesse dans la compréhension des ensembles finis, une partie pourtant importante de l'algèbre.

**II.B.1)** La réponse à cette question de cours n'est hélas pas unanime.

## Partie III

**III.A.1)** La factorisation donnée a incité certains à donner une démonstration directe, ce qui est possible par évaluation en nombres entiers.

**III.A.2)** Des calculs souvent trop longs et des erreurs.

**III.A.3)** Un raisonnement direct était voué à l'échec, le changement de base étant l'expression (difficile) des  $H_k$  en fonction des  $P_k$ .

**III.B.1)** Comme en III.A.2, quelques candidats faibles ont su faire le calcul. À l'inverse, ledit calcul est parfois bâclé dans de bonnes copies.

**III.C** – Quelques bonnes copies abordent cette partie. La question 1 est souvent correcte mais la conséquence sur  $H_n(\mathbb{Z})$  ne semble pas automatique. Il est d'ailleurs apparu lors de la partie I que certains étudiants connaissent les coefficients du binôme comme résultant du triangle de Pascal mais sans bien maîtriser la formule donnée par l'énoncé. La question 5 a reçu quelques bonnes réponses.

#### Partie IV

Cette partie n'a pas été abordée par suffisamment de candidats pour autoriser un commentaire pertinent. C'est dommage car d'autres compétences étaient demandées et les questions permettaient la progression vers un objectif intéressant (étude des fonctions  $t \mapsto t^\alpha$  qui envoient  $\mathbb{N}^*$  dans lui-même, sorte de pendant analytique de la partie III.C).

#### Conclusion

Les candidats montrent une bonne maîtrise de l'algèbre linéaire et de ses traductions matricielles.

Le manque de concision de certaines copies a pu limiter le nombre de questions abordées et partant la note obtenue.