Samedi 19 novembre 2022 – calculatrices autorisées

1 Réduction

On veut déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(A) = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter (en détaillant la démarche et les calculs !) une matrice inversible R telle que $R^{-1}AR$ soit diagonale.
   On ne demande pas de calculer R^{-1}.
2. Presque sans calcul, donner la valeur de $R^{-1}BR$.
3. Montrer que l'équation matricielle $P(A) = B$ est équivalente à trois équations scalaires de la forme $P(x) = y$.
4. Expliciter P_0 de degré 2 tel que $P_0(A) = B$.
5. Déterminer enfin l'ensemble des polynômes P tels que $P(A) = B$.
6. Déterminer l'ensemble des $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(B) = A$.

2 Une série de fonctions

On s'intéresse ici à la série de fonctions :

$$\sum \frac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx} + \mathrm{e}^{3nx}}.$$

Plus précisément, on note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx} + \mathrm{e}^{3nx}}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Est-ce que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$?

3 Valeurs propres de matrices stochastiques

Dans ce problème vous pouvez vérifier *vos calculs à la calculatrice, mais vous devez les* expliciter *sur la copie.*

Soient m, n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients complexes, $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes à coefficients complexes, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Question préliminaire

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général $a_{i,j}$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général $b_{i,j}$.
   (a) À quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
   (b) On suppose cette condition vérifiée, et on note $c_{i,j}$ le terme général de la matrice AB. Exprimer $c_{i,j}$ en fonction des $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

2. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p. On dit que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ si pour tous indices i, j, la suite complexe $\left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.
   (a) Montrer que si la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A et la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B alors la suite $(A_p + B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$.
   (b) Montrer que sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

Partie I

On considère la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que X_1 est un vecteur propre de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
3. On note :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}$$
Calculer D^n, puis montrer que $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Montrer que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *On donnera une expression explicite de la limite.*
5. Montrer qu'il existe un unique vecteur ligne (qu'on explicitera) $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ tel que :
   — $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$;
   — $a + b + c = 1$;
   — $\pi A = \pi$
   NDLR : faites un brouillon, merci ! Idéalement, j'aimerais voir les calculs. Mais si vous racontez ce que vous avez demandé à la calculatrice, c'est déjà ça...

Partie II

On considère la matrice carrée B d'ordre 2 suivante :

$$B = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On note I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1. On considère le polynôme $P = (X - 1)(X - (a + b - 1))$.
   Calculer $P(B) = (B - I_2)(B - (a + b - 1)I_2)$.
2. Soit p un entier strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un polynôme Q et de deux réels α_p et β_p tels que :
   $$X^p = PQ + \alpha_p X + \beta_p.$$
   (b) En évaluant l'expression précédente en des valeurs bien choisies, déterminer les valeurs de α_p et β_p.
   (c) En déduire une expression de B^p.
3. Montrer que la suite $(B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie III

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** lorsque :

— pour tout couple d'entiers (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$m_{i,j} \geqslant 0;$$

— la somme des termes de chaque ligne vaut 1, c'est-à-dire, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1.$$

1. Soit M une matrice stochastique. Montrer que pour tout couple d'entiers (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$m_{i,j} \leqslant 1.$$

2. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que si M est stochastique, alors X_1 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

   (b) Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels positifs. Montrer que si X_1 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, alors M est stochastique.

   (c) En déduire que le produit de deux matrices sochastiques est stochastique.

3. Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\operatorname{Max}} |x_i| = 1$.

   (a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$. Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$|y_i| \leqslant 1.$$

   (b) En déduire que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors :

$$|\lambda| \leqslant 1.$$

   (c) Montrer que les valeurs propres de M sont toutes de module inférieur ou égal à 1.