1 Réduction

1. On trouve sans trop de mal : $\chi_A = X^3 - 2X = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ donc (polynôme caractéristique scindé à racines simples) A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. On trouve ensuite une base de diagonalisation en cherchant un vecteur directeur de chaque sous-espace propre (ce sont des droites puisqu'il y a trois valeurs propres différentes). Une résolution propre de $AX = \lambda X$ (qui ne commence donc **pas** par « soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_3)$ » bien entendu, sinon poubelle...) fournit :

$$\mathrm{Ker}\,(A+\sqrt{2}I_3) = \mathrm{Vect}\,\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}}_{f_1} \qquad \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\,\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{f_2} \qquad \mathrm{Ker}\,(A-\sqrt{2}I_3) = \mathrm{Vect}\,\underbrace{\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}}_{f_3}$$

$$\boxed{\text{En prenant } R = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ on a } R^{-1}AR = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

Bon, je vais demander à Python pour vérifier :

```
from numpy import array, sqrt
from numpy.linalg import eig, inv

---

>>> A = array([[0,1,0], [1,0,1], [0,1,0]])
>>> eig(A)
(array([ -1.41421356e+00,  -3.61726744e-17,   1.41421356e+00]),
array([[  5.00000000e-01,   7.07106781e-01,   5.00000000e-01],
       [ -7.07106781e-01,   2.97164569e-17,   7.07106781e-01],
       [  5.00000000e-01,  -7.07106781e-01,   5.00000000e-01]]))
```

Les joies du calcul numérique...

2. La matrice $R^{-1}BR$ représente b (canoniquement associée à B) dans la base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$. Mais $BF_1 = F_1$, $BF_2 = -F_2$ et $BF_3 = F_3$ (les F_i étant ce qu'on imagine), ce qui se traduit $b(f_1) = f_1$, $b(f_2) = -f_2$ et $b(f_3) = f_3$, soit encore :

$$\boxed{R^{-1}BR = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

Ainsi, A et B sont codiagonalisables.

```
>>> R = array([[1,1,1], [-sqrt(2),0,sqrt(2)], [1,-1,1]])
>>> B = array([[0,0,1], [0,1,0], [1,0,0]])
>>> inv(R).dot(B).dot(R)
array([[ 1.,  0.,  0.],
       [ 0., -1.,  0.],
       [ 0.,  0.,  1.]])
```

3. Tout d'abord, notons $D_A = R^{-1}AR$, de sorte que

$$P(A) = P(RD_AR^{-1}) = RP(D_A)R^{-1} = R\begin{pmatrix}P(-\sqrt{2}) & 0 & 0\\ 0 & P(0) & 0\\ 0 & 0 & P(\sqrt{2})\end{pmatrix}R^{-1}$$

La relation centrale, classique, s'obtient en montrant d'abord (récurrence immédiate) que $A^k = RD_A^kR^{-1}$ puis en continuant par linéarité du produit matriciel.
Maintenant, l'équation $P(A) = B$ est équivalente à

$$R\begin{pmatrix} P(-\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & P(0) & 0 \\ 0 & 0 & P(\sqrt{2}) \end{pmatrix} R^{-1} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^{-1}$$

elle même équivalente à

$$\begin{pmatrix} P(-\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & P(0) & 0 \\ 0 & 0 & P(\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(pour montrer l'équivalence, on raisonne bien entendu par double implication, chacune nécessitant une multiplication à droite et à gauche). Finalement :

$$\boxed{P(A) = B \iff \begin{cases} P(-\sqrt{2}) = 1 \\ P(0) = -1 \\ P(\sqrt{2}) = 1 \end{cases}}$$

4. Le théorème d'interpolation de Lagrange nous dit qu'il existe un (unique) polynôme de degré au plus 2 envoyant respectivement $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$ sur 1, -1 et 1. Un tel polynôme se trouve à vue (faire un dessin avec trois points !) : $X^2 - 1$ convient.

$$\boxed{\text{En prenant } P_0 = X^2 - 1, \text{ on a } P_0(A) = B}$$

Et si on ne voit pas P_0 (par exemple parce qu'on a pas regardé*) ? Et bien on le cherche sous la forme $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$...*

5. On a $P(A) = B$ si et seulement si $\begin{cases} P(-\sqrt{2}) = 1 \\ P(0) = -1 \\ P(\sqrt{2}) = 1 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} P(-\sqrt{2}) = P_0(-\sqrt{2}) \\ P(0) = P_0(0) \\ P(\sqrt{2}) = P_0(\sqrt{2}) \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} (P - P_0)(-\sqrt{2}) = 1 \\ (P - P_0)(0) = -1 \\ (P - P_0)(\sqrt{2}) = 1 \end{cases}$, problème équivalent au fait que $P - P_0$ est divisible par $(X + \sqrt{2})X(X - \sqrt{2})$.

$$\boxed{P(A) = B \text{ si et seulement si } P \text{ est de la forme } X^2 - 1 + X(X^2 - 2)Q, \text{ avec } Q \in \mathbb{K}[X]}$$

6. On a cette fois $Q(B) = A$ si et seulement si $\begin{cases} Q(1) = -\sqrt{2} \\ Q(-1) = 0 \\ Q(1) = \sqrt{2} \end{cases}$
Ces contraintes sont excessivement difficiles à remplir.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de polynôme } Q \text{ tel que } Q(B) = A.}$$

2 Une série de fonctions

1. Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $x_0 > 0$, $f_n(x_0) \sim x_0^2 \mathrm{e}^{-3nx_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et enfin pour $x_0 < 0$, $f_n(x_0) \sim x_0^2 \mathrm{e}^{2nx_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$$

2. En $x = 0$, la convergence de $\sum f_n(x)$ ne pose guère de problème.
Si on fixe $x_0 > 0$, on a $f_n(x_0) \sim x_0^2 \mathrm{e}^{-3nx_0} = o(1/n^2)$, et **par comparaison de séries à termes positifs** , $\sum f_n(x_0)$ est convergente.
Pour $x_0 < 0$, $f_n(x_0) \sim x_0^2 \mathrm{e}^{2nx_0} = o(1/n^2)$ et on peut conclure de la même façon.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

3 Algèbre linéaire : PT 2013 - sujet A

Question préliminaire

1. (a) D'après le tout premier cours de première année sur les matrices :

$$\boxed{AB \text{ est défini si et seulement si } q = r\,; \text{ et on a alors } AB \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{C}).}$$

(b) Toujours d'après ce cours de première année :

$$\boxed{\text{Pour tous } i, j \text{ tels que } 1 \leqslant i \leqslant p \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant s, \text{ on a } c_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{q} a_{i,\ell} b_{\ell,j}}$$

2. (a) Sous les hypothèses de l'énoncé, et on notant $c_{i,j}^{(k)}$ le terme général de $C_k = A_k + B_k$, on a, à i et j fixés dans $[\![1, n]\!]$:

$$c_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k)} + b_{i,j}^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a_{i,j} + b_{i,j} = c_{i,j},$$

avec $c_{i,j}$ le terme général de $C = A + B$. Ceci est vrai pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, donc on a :

$$\boxed{A_k + B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A + B}$$

(b) Pour le produit, c'est à peine moins évident, puisque cette fois c'est une somme de n produits de deux termes qui convergent qu'on obtient. Les théorèmes de première/terminale nous assurent que cette somme est convergente :

$$c_{i,j}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{q} a_{i,\ell}^{(k)} b_{\ell,j}^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{\ell=1}^{q} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = c_{i,j},$$

avec $c_{i,j}$ le terme général de $C = AB$. Ceci est vrai pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, donc on a :

$$\boxed{A_k B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AB}$$

REMARQUE : On rappelle une fois de plus que les théorèmes dont on parle racontent D'ABORD qu'il y a une limite, avant de dire ce qu'elle vaut – contrairement à ce que vous laisse en général penser la notation « lim = ».

Partie I

1. On *constate* que $AX_1 = X_1$, et puisque X_1 est **non nul** :

$$\boxed{X_1 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ (associé à la valeur propre 1).}}$$

2. On peut calculer le polynôme caractéristique de A (il sera de degré 3 et on en connaît déjà une racine, donc on saura trouver les autres racines). On commence par l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ qui préserve le déterminant et fait apparaître un zéro, avant de développer par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X & -1/2 & -1/2 \\ -3/4 & X & -1/4 \\ -1/8 & -7/8 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1/2 & 0 \\ -3/4 & X & -1/4 - X \\ -1/8 & -7/8 & X + 7/8 \end{vmatrix} \\
&= (X + 7/8)\left(X^2 - 3/8\right) + (X + 1/4)\,(-7/8X - 1/16) \\
&= X^3 + X^2\,(7/8 - 7/8) + X\,(-3/8 - 1/16 - 7/32) - 21/64 - 1/64.
\end{aligned}$$

Puis :

$$\chi_A = X^3 - \frac{21}{32}X - \frac{11}{32} = (X - 1)\left(X^2 + X + \frac{11}{32}\right)$$

Puisque les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\} \text{ et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{1, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{6}}{8}, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{6}}{8}\right\}}$$

Pour que A soit diagonalisable, il est **nécessaire** que son polynôme caractéristique soit scindé et il est **suffisant** qu'il soit scindé à racines simples, donc :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C} \text{ mais pas sur } \mathbb{R}.}$$

3. Notons $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i$ et $r_2 = \overline{r_1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i$; on a alors par récurrence immédiate :

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_1^n & 0 \\ 0 & 0 & r_2^n \end{pmatrix}}$$

Puisque $|r_1|^2 = \frac{1}{4} + \frac{6}{64} = \frac{11}{32} < 1$ et $|r_2| = |r_1|$, on a $r_1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $r_2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$\boxed{D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. Prenons X_2 et X_3 des vecteurs propres associés respectivement à r_1 et r_2 ; la famille $\mathcal{F} = (X_1, X_2, X_3)$ est alors une base de diagonalisation de l'endomorphisme u canoniquement associé à A, et en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathcal{F}$ on aura $D = P^{-1}AP$ mais aussi $D^n = P^{-1}A^nP$ (récurrence immédiate, ou bien on considère l'endomorphisme u^n...), puis $A^n = PD^nP^{-1}$. Puisque $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, les préliminaires nous assurent qu'il en va de même pour $(PD^nP^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (toute suite constante est convergente...).

$$\boxed{A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} PLP^{-1}}$$

Le calcul de cette limite nécessite théoriquement de connaître les valeurs de P et P^{-1}, ce qui est évidemment pénible. Bon, je n'ai finalement pas trop envie de finasser... Je demande à ma (grosse) calculatrice.

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[0,1/2,1/2],[3/4,0,1/4],[1/8,7/8,0]]):
> P:=Eigenvectors(A)[2];
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{11}{8}\,\frac{-1+1/2\,i\sqrt{6}}{\left(1/2+\frac{23}{8}\,i\sqrt{6}\right)\left(-1/2+1/8\,i\sqrt{6}\right)} & \frac{11}{8}\,\frac{-1-1/2\,i\sqrt{6}}{\left(1/2-\frac{23}{8}\,i\sqrt{6}\right)\left(-1/2-1/8\,i\sqrt{6}\right)} & 1 \\ -1/4\,\frac{13+6\,i\sqrt{6}}{1/2+\frac{23}{8}\,i\sqrt{6}} & -1/4\,\frac{13-6\,i\sqrt{6}}{1/2-\frac{23}{8}\,i\sqrt{6}} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> simplify(P.DiagonalMatrix([0,0,1]).P**(-1));
...
```

$$\boxed{A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \end{pmatrix}}$$

5. En notant C la transposée de π, le problème est équivalent à : trouver C dans Ker $({}^tA - I)$ dont les coefficients sont positifs et de somme égale à 1. Puisque ce noyau est de dimension 1 (pourquoi ?), la condition de normalisation fait qu'il y aura au plus une solution.

```
NullSpace(Transpose(A)-1);
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\text{L'unique solution au problème posé est : } \pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 & 4/15 \end{pmatrix}}$$

Partie II

1. On peut faire le calcul brutal... ou constater que P est le polynôme caractéristique de B, et appliquer le théorème de Cayley-Hamilton – qui n'est pas au programme de PT :

$$\boxed{P(B)=0}$$

2. (a) Il suffit de réaliser la division euclidienne de X^p par P, qui est de degré 2 : le reste est de degré au plus 1.

$$\boxed{\text{Il existe } Q\in\mathbb{R}[X],\ \alpha_p,\beta_p\in\mathbb{R} \text{ tels que } X^p=PQ+\alpha_pX+\beta_p}$$

   (b) On évalue évidemment la relation polynomiale précédente en les racines de P, à savoir 1 et $a+b-1$. On obtient alors $1=\alpha_p+\beta_q$, et $(a+b-1)^p=\alpha_p(a+b-1)+\beta_p=\alpha_p(a+b-1)+(1-\alpha_p)$. Une ligne de calcul plus loin, il vient :

$$\boxed{\alpha_p=\frac{(a+b-1)^p-1}{a+b-2} \text{ puis } \beta_p=\frac{a+b-1-(a+b-1)^p}{a+b-2}.}$$

   (c) Si on reprend la division euclidienne vue plus haut et qu'on évalue ces polynômes en B, le terme $P(B)$ est nul, et il vient donc :

$$\boxed{B^p=\alpha_pB+\beta_pI_2}$$

3. Observons la suite géométrique en jeu. Puisque $0<a,b<1$, on a

$$-1<a+b-1<2-1=1$$

donc $(a+b-1)^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\alpha_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{a+b-2}$ et $\alpha_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a+b-1}{a+b-2}$; ainsi :

$$\boxed{B^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{a+b-2}B+\frac{a+b-1}{a+b-2}I_2=\frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} b-1 & a-1\\ b-1 & a-1\end{pmatrix}}$$

Partie III

1. Soient $i,j\in[\![1,n]\!]$. Chaque $m_{i,k}$ est positif, donc

$$m_{i,j}=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}}_{=1}-\underbrace{\sum_{k\neq j}m_{i,k}}_{\geqslant 0},$$

donc :

$$\boxed{\text{pour tous } i,j, \text{ on a } m_{i,j}\leqslant 1}$$

2. (a) Il suffit de noter que si M est stochastique, alors $MX_1=X_1$ (traduit le fait que sur chaque ligne, la somme des coefficients vaut 1), et $X_1\neq 0$.

$$\boxed{X_1 \text{ est vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre 1.}}$$

   (b) C'est presque pareil ! La condition $MX_1=X_1$ dit exactement que sur chaque ligne i, $\sum\limits_{j=1}^{n}m_{i,j}=1$. Comme on a par ailleurs supposé les $m_{i,j}$ positifs :

$$\boxed{M \text{ est stochastique.}}$$

   (c) Soient A et B stochastique. Tout d'abord, AB est à coefficients réels positifs (somme de produits de réels positifs) ; ensuite, $(AB)X_1=A(BX_1)=AX_1=X_1$ (on a utilisé deux fois le résultat de la question 2.(a)). Ainsi, d'après la question 2.(b), AB est stochastique.

$$\boxed{\text{Le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.}}$$

3. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$, donc par inégalité triangulaire :

$$|y_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \underbrace{|x_j|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ |y_i| \leqslant 1.}$$

(b) Supposons : $MX = \lambda X$. La question précédente nous assure que pour tout i, $|\lambda x_i| \leqslant 1$. Mais le maximum des $|x_i|$ vaut 1, donc si on choisit i_0 tel que $|x_{i_0}| = 1$, on obtient $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda, \text{ alors } |\lambda| \leqslant 1.}$$

(c) Soient λ une valeur propre de A, et Z un vecteur propre associé. On n'a pas forcément $\operatorname{Max} |z_i| = 1$, mais ce maximum est strictement positif ($Z \neq 0$). Si on le note m et qu'on considère $X = \frac{1}{m} Z$, on a alors toujours $AX = \lambda X$, mais avec cette fois $\operatorname{Max} |x_i| = 1$, et on peut appliquer le résultat des deux questions précédentes.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont toutes de module majoré par 1}}$$