1 Pour ne pas perdre la main

Tout d'abord, $P = X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A, donc le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P, c'est-à-dire $\{0,1,2\}$. Par ailleurs, A est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre (on rappelle que λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I$ n'est pas inversible). Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1,2\}$.
Puisque A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable. Si on note u l'endomorphisme canoniquement associé, on a au choix : $\mathbb{R}^6 = \mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})$, ou encore l'existence d'une base $\mathcal{F}$ de E telle que (en notant k la dimension de $\mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{Id})$) :

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2I_{6-k} \end{pmatrix}$$

On utilise bien entendu la trace pour déterminer k :

$$\mathrm{tr}(A) = 11 = \mathrm{tr}(u) = k + 2(6-k) = 12-k,$$

donc $k=1$.

Enfin, A^{999} est la matrice de u^{999} dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$, donc $\mathrm{tr}(A^{999}) = \mathrm{tr}(u^{999})$, qu'on peut calculer plutôt dans la base adaptée :

$$\mathrm{tr}(A^{999}) = \mathrm{tr}(u^{999}) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}(u^{999},\mathcal{F})\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2^{999}I_5 \end{pmatrix}$$

soit finalement :

$$\boxed{\mathrm{tr}(A^{999}) = 1 + 5\times 2^{999}}$$

2 Séries entières : développement de $1/f$

1. On a $f(0) \neq 0$, et f est continue en 0 (comme en tout point du disque ouvert de convergence), donc :

   $$\boxed{\text{Il existe un voisinage de 0 sur lequel } f \text{ ne s'annule pas.}}$$

   Les sceptiques sortiront les ε : il existe $\eta > 0$ tel que $|z-0| \leqslant \eta$ implique $|f(z)-f(0)| \leqslant \dfrac{|a_0|}{2}\cdots$

2. Pour $|z| < R = \min(R_f, R_g)$, les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc leur produit de Cauchy $\sum\limits_n \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ également, et la somme de ce produit de Cauchy vaut d'une part $f(z)g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ et d'autre part $f(z)g(z) = 1 = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0z^n$, donc *par unicité du développement en série entière* :

   $$\boxed{a_0 b_0 = 1, \text{ et pour tout } n \geqslant 1,\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0.}$$

3. Pour trouver une solution, il *suffit* de construire les b_n par récurrence, en posant $b_0 = \dfrac{1}{a_0}$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n = -\dfrac{1}{a_0}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

On a prouvé l'existence mais pas l'unicité. Attention au passage aux preuves d'unicité par récurrence : on peut facilement faire l'erreur de raisonnement *« il existe un unique chemin de A vers B et il existe un unique chemin de B vers C, donc il existe un unique chemin de A vers C »...*
Pour l'unicité, on peut par exemple supposer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux solutions distinctes à notre système d'équations, et noter n_0 le plus petit indice tel que $b_{n_0} \neq b'_{n_0}$. On a alors $n_0 \neq 0$ (puisque $b_0 = b'_0 = \dfrac{1}{a_0}$), et $b_k = b'_k$ pour tout $k < n_0$, donc

$$b_{n_0} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n_0} a_k b_{n_0-k} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n_0} a_k b'_{n_0-k} = b'_{n_0},$$

ce qui est absurde.

$\boxed{\text{Le système d'équations précédent possède une unique solution.}}$

Essentiellement, on est face à un système linéaire certes infini, mais triangulaire, d'où l'existence et l'unicité de la solution.

4. Par définition du rayon de convergence, la suite $\left(a_n\left(\dfrac{R}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc :

$$\boxed{\text{Il existe } K_1 > 0 \text{ tel que pour tout } n\in\mathbb{N},\ |a_n| \leqslant K_1\left(\frac{2}{R}\right)^n.}$$

5. Par inégalités triangulaires multiples, et en utilisant la majoration des $|b_k|$ pour $k < n$, on obtient :

$$\begin{aligned} |b_n| &= \left|-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right| \leqslant \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n} K_1 K_2^k \alpha\beta^{n-k} \\ &= \frac{K_1\alpha\beta^n}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{K_2}{\beta}\right)^k = \frac{K_1K_2\alpha}{|a_0|(\beta-K_2)}\left(1-\left(\frac{K_2}{\beta}\right)^n\right)\beta^n. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\beta > K_2$, on obtient alors :

$$\boxed{|b_n| \leqslant \frac{K_1K_2\alpha}{|a_0|(\beta-K_2)}\beta^n.}$$

6. Pour prouver la proposition «$|b_n| \leqslant \alpha\beta^n$», il suffit que cette proposition soit vérifiée au rang 0 (c'est-à-dire $\alpha \geqslant |b_0|$), et qu'elle soit héréditaire, ce qui sera assuré si $\beta > K_2$ et $\dfrac{K_1K_2}{|a_0|(\beta-K_2)} \leqslant 1$: il suffit pour cela de prendre $\beta = K_2 + \dfrac{K_1K_2}{|a_0|}$.
On fixe α et β ainsi (pour α, on prend $|b_0|$) : la question précédente permet alors de prouver par récurrence l'inégalité $|b_n| \leqslant \alpha\beta^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Cette majoration peut se récrire $|b_n|\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^n \leqslant \alpha$, ce qui nous assure que le rayon de convergence R_b de $\sum b_n z^n$ est minoré par $\dfrac{1}{\beta}$, donc est **strictement positif**.
Sur le disque ouvert $D(0,r)$ avec $r = \min(R_f, R_g) > 0$, la série $\sum b_n z^n$ est donc absolument convergente, et la fonction somme h vérifie pour tout $z \in D(0,r)$:

$$f(z)h(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = 1,$$

donc $h(z) = \dfrac{1}{f(z)} = g(z)$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est développable en série entière en 0 et } f(0)\neq 0, \text{ alors } \frac{1}{f} \text{ est développable en série entière en 0}}$$

7. Il suffit de prendre $f(z) = 1 - z$ ou $f(z) = \frac{1}{1-z}$, pour changer...

$$\boxed{\text{L'exemple universel } \sum z^n\text{... est vraiment universel !}}$$

En fait, on peut montrer que le rayon de convergence R_g de $\sum b_n z^n$ est la borne inférieure des $r > 0$ tels qu'il existe z de module r tel que $f(z) = 0$. Il est clair que R_g est majoré par cette borne inférieure. La minoration vient d'un résultat assez profond : il existe sur le cercle de convergence un « point singulier », c'est-à-dire un point au voisinage duquel on ne peut prolonger analytiquement g... Les détails seront dans votre cours sur les fonctions holomorphes l'année prochaine !

3 Séries entières (d'après un oral de centrale PSI)

1. Les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A = X^2 + X - 1$. Puisque le discriminant est strictement positif, il y en a deux, et elles sont réelles : notons les λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Leurs valeurs ne sont pas si intéressantes que cela ; c'est plus leur signe et leur module qui nous intéressent. Puisque $\lambda_1\lambda_2 < 0$, on a $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, et puisque $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$, on a même $\lambda_1 < -1$; enfin, comme $|\lambda_1\lambda_2| = 1$, on a $0 < \lambda_2 < 1$!

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \text{ avec } \lambda_1 = \tfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \text{ et } \lambda_2 = \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in]0,1[}$$

2. Tout d'abord, tout le monde aura noté que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
Notons V_1 et V_2 deux vecteurs propres pour A (on raisonne matriciellement, pour changer) : ils constituent une famille libre donc génératrice de $\mathbb{R}^2$, donc il existe une décomposition $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \alpha V_1 + \beta V_2$ Puisque $AV_1 = \lambda_1 V_1$, on a par récurrence immédiate $A^n V_1 = \lambda_1^n V_1$, et le résultat analogue pour $A^n V_2$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n (\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha \lambda_1^n V_1 + \beta \lambda_2^n V_2$$

V_1 et V_2 étant des vecteurs constants, si on observe les deux lignes de la relation matricielle précédente , on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont combinaisons linéaires de } (\lambda_1^n) \text{ et } (\lambda_2^n).}$$

Arrivé ici, on ne peut pas exclure que ces combinaisons linéaires soient « partiellement triviales », i.e. : avec une composante nulle.

3. On se souvient que $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$, donc les relations précédentes nous disent que u_n est équivalent à quelque chose de la forme $K\lambda_1^n$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $(u_n r^n)$ est bornée si et seulement si $r \leqslant \dfrac{1}{|\lambda_1|}$, ce qui donne le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$, le même raisonnement étant valable pour la seconde série entière.
Mais attention, sommes-nous certains que « la composante en λ_1^n est non nulle » ? Il s'agit de vérifier que d'une part $\alpha \neq 0$ et d'autre part V_1 possède deux composantes non nulles.
   - Si $\alpha = 0$, alors $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à V_2, donc est vecteur propre de A... ce qui n'est pas le cas puisque $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   - Si V_1 possède l'une de ses composantes nulles, alors l'un des deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est vecteur propre pour A : ce n'est pas le cas non plus car $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Finalement, il y a effectivement une composante non nulle selon (λ_1^n), pour (u_n) comme pour (v_n).

$$\boxed{\text{Les rayons de convergence de } \sum u_n x^n \text{ et } \sum v_n x^n \text{ sont égaux à } R = \frac{1}{|\lambda_1|}.}$$

4. Sur $]-R,R[$, toutes les séries en jeu sont convergentes, et on peut joyeusement écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - x\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n,$$

c'est-à-dire $U(x)-1 = x(U(x)-V(x))$, et de la même manière : $V(x)-1 = x(U(x)-2V(x))$. On peut réécrire ces informations sous la forme d'un système :

$$\boxed{\forall x \in]-R,R[, \qquad \begin{cases} (1-x) & U(x) & + & x & V(x) & = 1 \\ x & U(x) & - & (1+2x) & V(x) & = -1 \end{cases}}$$

5. Le déterminant du système précédent est $-(1-x)(1+2x)-x^2 = x^2-x-1$, donc est nul si et seulement si $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} - 1 = 0$, c'est-à-dire [1] : $\frac{1}{x} \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
Déjà, on est rassuré : $|x| < \frac{1}{|\lambda_1|} < \frac{1}{|\lambda_2|}$ donc ce déterminant est non nul, donc le système va posséder une unique solution... qu'on trouve maintenant comme on veut [2] :

$$\boxed{\text{Pour } x \in]-R,R|,\ U(x) = \frac{-1-x}{x^2-x-1} \text{ et } V(x) = \frac{-1}{x^2-x-1}.}$$

4 Une intégrale

1. Lorsque θ décrit $[0,\pi]$, $\dfrac{\theta}{2}$ décrit $[0,\pi/2]$, et la fonction tan n'est tout bêtement pas définie sur ce segment entier...
2. L'application $\varphi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1+\sin\theta}{2+\cos\theta}$ est continue (numérateur et dénominateur le sont, et ce dernier reste à valeurs minorées par 1, donc strictement positives). Le théorème fondamental du calcul différentiel/intégral nous assure alors que f est une primitive de φ, donc de classe $\mathcal{C}^1$, et a fortiori :

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est continue.}}$$

3. L'existence de cette décomposition est donnée par le cours... Et on explicite les coefficients en s'intéressant à $((1+X^2)F)(i)$ qui vaut d'une part $ai+b$ et d'autre part $\frac{(1+i)^2}{2} = i$, donc (a et b étant réels...) par identification des parties réelles et imaginaires : $a=1$ et $b=0$.
De même, $((X^2+3)F)(i\sqrt{3}) = ci\sqrt{3}+d = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{-2}$ donc $c=-1$ et $d=1$:

$$\boxed{\frac{(1+X)^2}{(3+X^2)(1+X^2)} = \frac{X}{1+X^2} + \frac{1-X}{3+X^2}.}$$

4. C'est du cours de première année... on peut par exemple écrire (on prend garde au fait qu'on divise par des choses non-nulles...) :

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = 2t\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Pour le cosinus, on peut ensuite par exemple retrouver (je ne connais pas cette formule, vraiment !) $\tan(2u) = \cdots = \dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$ donc $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$, etc.
5. Sur $[0,x]$, le changement de variable $t = \tan(\theta/2)$ donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\int_0^{\tan(x/2)} \frac{(1+t)^2 dt}{(3+t^2)(1+t^2)} = 2\int_0^{\tan(x/2)} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t-1}{3+t^2}\right) dt \\ &= \int_0^{\tan(x/2)} \Big(\big(\ln(1+t^2)\big)' - \big(\ln(3+t^2)\big)\Big)\, dt + 2\int_0^{\tan(x/2)} \frac{dt}{1+t^2}, \end{aligned}$$

1. On reconnaît le polynôme caractéristique de A ; incroyable !
2. Je fermerai les yeux sur les pires obscénités que vous ne manquerez pas d'écrire pour arriver à vos fins...

soit finalement [3] :

$$\boxed{f(x) = \ln 3 + \ln \frac{1+\tan^2(x/2)}{3+\tan^2(x/2)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\cdot}$$

6. La continuité de f nous assure : $f(x) \underset{x\to\pi^-}{\longrightarrow} f(\pi)$. Mais après le calcul précédent on peut écrire :

$$f(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + \ln \frac{1+\tan^2(x/2)}{3+\tan^2(x/2)} \underset{x\to\pi^-}{\longrightarrow} \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

donc par unicité de la limite :

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{1+\sin\theta}{2+\cos\theta}d\theta = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot}$$

3. $\left(\frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a^2+x^2}$