CCP MP 2011 - maths 1

Exercice 1

1. Soit $r \geqslant 0$. La suite $\left(\dfrac{r^n}{n^2-1}\right)_{n\geqslant 2}$ est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$ (d'après ce qu'on sait sur les croissances comparées depuis la terminale). Voila, c'est fini.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière vaut 1.}}$$

2. On note d'abord que $\dfrac{2}{n^2-1} = \dfrac{2}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$, ce qui conduit à écrire pour $|x| < 1$ (toutes les séries étant convergentes) :

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = x \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}}_{S_1(x)} - \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}}_{S_2(x)}$$

On reconnaît « bien entendu » [1] $S_1(x) = -\ln(1-x)$. Par ailleurs (sur $]-1,1[$, les séries entières de rayon de convergence 1 se dérivent sous le signe somme) :

$$(xS_2(x))' = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} = \frac{(x^2-x)+(x-1)+1}{1-x} = -x-1+\frac{1}{1-x} = \left(-\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)\right)',$$

donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour $|x| < 1$, $xS_2(x) = -\dfrac{x^2}{2} - x - \ln(1-x) + K$. En regardant le coefficient constant (la valeur en 0), on constate que $K = 0$. Finalement :

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + \dfrac{x}{2} - x\ln(1-x) + \dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}}$$

3. On peut observer l'expression trouvée précédemment : $1 + \dfrac{1-u}{2} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}$, et :

$$-(1-u)\ln(u) + \frac{\ln u}{1-u} = \ln u\,(1 + u + o(u) - 1 + u) = O(u \ln u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $S(1-u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}\cdot$ Ceci dit, la série entière converge normalement sur $[-1,1]$ ($\|f_n\|_\infty = O(1/n^2)$), donc la somme est définie et continue sur $[-1,1]$, donc il était certain que $S(x)$ tendait vers $S(1)$ lorsque x tend vers 1^-. Bref :

$$\boxed{S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} S(1) = \frac{3}{2}\cdot}$$

1. Ou pas : mais on le retrouve alors par dérivation.

Exercice 2

1. L'équation homogène associée est $y' - \dfrac{3}{2x}y = 0$. Puisque $\dfrac{3}{2x} = \left(\dfrac{3}{2}\ln x\right)'$, les solutions de l'équation homogènes sont les applications $x \mapsto K\mathrm{e}^{3/2\ln x} = x^{3/2}$.
   On cherche ensuite UNE (pas toutes, merci) solution particulière en posant $y(x) = K(x)x^{3/2}$: une telle application est solution de (E) si et seulement si $K'(x)x^{3/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, c'est-à-dire $K'(x) = \dfrac{1}{2x^2} = \left(\dfrac{-1}{2x}\right)'$: il SUFFIT donc de prendre $K(x) = -\dfrac{1}{2x}$ pour obtenir la solution particulière de (E) : $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x}}{2}\cdot$ On en déduit :

   $$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\text{ sont les applications } x \mapsto \alpha x^{3/2} - \frac{\sqrt{x}}{2} \text{ où } \alpha \text{ décrit } \mathbb{R}.}$$

2. Question étrange... Bon, toute solution sur $[0,+\infty[$ a sa restriction sur $]0,+\infty[$ qui est bien connue, et vaut 0 en 0 (reprendre l'équation différentielle en $x = 0$), donc les expressions trouvées précédemment restent vraies sur $[0,+\infty[$. Or les applications $x \mapsto \alpha x^{3/2}$ sont toutes dérivables sur $[0,+\infty[$, mais $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ ne l'est pas, donc...

   $$\boxed{(E) \text{ ne possède aucune solution sur } [0,+\infty[.}$$

Problème

1. (a) **Supposons f positive :** il y a équivalence entre les deux propositions puisqu'une fonction est par définition intégrable sur un intervalle si et seulement si son intégrale sur cet intervalle est absolument convergente.

   $$\boxed{\text{Si } f \text{ est positive, (i) et (ii) sont équivalents}}$$

   (b) **Dans le cas général :** l'intégrabilité impose l'existence d'une limite pour F (c'est du cours : décomposer $f = f^+ - f^-$: f^+ et f^- sont intégrables, etc...), mais la réciproque est fausse : prendre par exemple $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \in [1,+\infty[$.

   $$\boxed{\text{Si } f \text{ n'est pas positive, (i) implique (ii), mais la réciproque est fausse.}}$$

PARTIE I : Exemples et propriétés

2. (a) E est une partie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ qui est non vide (elle contient la fonction nulle) et stable par combinaisons linéaires (puisque les fonctions intégrables sont également stables par combinaisons linéaires) :

   $$\boxed{E \text{ est un sous-espace de } \mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}).}$$

   Bon, la lecture du rapport laisse penser qu'il fallait détailler. J'imagine qu'il aurait fallu, à un moment, passer par quelque chose comme :

   $$\left|(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))\,\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |\alpha|\left|f_1(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| + |\beta|\left|f_2(t)\mathrm{e}^{-xt}\right|.$$

   Mouais...

   (b) La stabilité de F par combinaisons linéaires est clair, ainsi que sa non-vacuité (toujours la fonction nulle...). Il faut en fait surtout vérifier que F est inclus dans E. Soit donc $f \in F$. Si on note M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ et qu'on fixe $x > 0$, alors :

   $$\forall t \geqslant 0, \qquad \left|f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant M\mathrm{e}^{-xt} \underset{+\infty}{=} o(1/t^2).$$

   Le membre de droite étant intégrable (en t) sur $\mathbb{R}^+$, il en va de même du membre de gauche (qui est positif), donc $f \in E$.

$$\boxed{F \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } E.}$$

(c) Tout d'abord, si $f \in E$, alors $\mathcal{L}(f)$ est bien une application de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}$. Ensuite, si $f_1, f_2 \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et enfin $x > 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}(\alpha\mathcal{L}(f_1) + \beta\mathcal{L}(f_2))(x) &= \alpha\mathcal{L}(f_1)(x) + \beta\mathcal{L}(f_2)(x) = \alpha\int_0^{+\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-tx}dt + \beta\int_0^{+\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-tx}dt \\ &= \int_0^{+\infty} (\alpha f_1 + \beta f_2)(t)\mathrm{e}^{-xt}dt = \mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2)(x).\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $x > 0$, on a donc $\alpha\mathcal{L}(f_1) + \beta\mathcal{L}(f_2) = \mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2)$.

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } \mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R}).}$$

3. (a) L'application $\mathcal{U}$ est bornée, donc est dans F donc dans E : elle possède une transformée de Laplace. Soit alors $x > 0$. On a tout simplement :

$$\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}dt = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\mathcal{U} \in E, \text{ et pour tout } x > 0,\ \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \frac{1}{x}\cdot}$$

Pour ceux ayant des états d'âmes, pour le premier calcul, on peut éventuellement passer par :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T \mathrm{e}^{-tx}dt = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\right]_0^T = \lim_{T\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{x} = \frac{1}{x}\cdot$$

(b) Ce n'est guère différent qu'à la question précédente (appartenance à E et calcul) :

$$\boxed{h_\lambda \in E, \text{ et pour tout } x > 0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{\lambda + x}\cdot}$$

4. On s'intéresse naturellement au rapport $\dfrac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-xt/2}} = \dfrac{t^n}{\mathrm{e}^{xt/2}}$, quantité qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, donc ce rapport est majoré par 1 pour t assez grand, disons $t \geqslant A$. On a alors (ne pas oublier les valeurs absolues) :

$$\forall t \geqslant A, \qquad |g_n(t)|\,\mathrm{e}^{-xt} = t^n\,|f(t)|\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant |f(t)|\,\mathrm{e}^{-t/2},$$

et l'intégrabilité de $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t/2}$ assure celle de $t \mapsto g_n(t)\mathrm{e}^{-xt}$. Ceci étant valable pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\text{l'application } g_n \text{ est bien dans } E.}$$

5. Sous les hypothèses de l'énoncé, on fixe $x > 0$. L'intégrabilité de $t \mapsto f'(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est (puisque f' est continue **et à valeurs positive**) équivalente à l'existence d'une limite pour $\displaystyle\int_0^T f'(t)\mathrm{e}^{-xt}dt$. Or, une intégration par parties sans finesse donne :

$$\forall T > 0, \qquad \int_0^T f'(t)\mathrm{e}^{-xt}dt = f(T)\mathrm{e}^{-xT} - f(0) + x\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-xt}dt.$$

Lorsque T tend vers $+\infty$, le membre de droite tend (puisque f est bornée, $x > 0$ et $f \in E$) vers $-f(0) + x\mathcal{L}(f)(x)$. Ceci prouve que $t \mapsto f'(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable (donc f' est dans E), avec de plus la formule annoncée pour $\mathcal{L}(f')(x)$.

$$\boxed{\text{Sous les hypothèses de l'énoncé, } f' \in E, \text{ et pour tout } x > 0,\ \mathcal{L}(f')(x) = -f(0) + x\mathcal{L}(f)(x).}$$

6. (a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On se lance dans la check-list attendue, en notant, pour $(x,t) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$: $g(x,t) = f(t)\mathrm{e}^{-xt}$. Pour la domination, on va avoir besoin d'un minorant strictement positif pour x. On travaille donc dans un premier temps, à $X > 0$ fixé, pour $x \in A = [X, +\infty[$.

— Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux (et intégrable) sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question 4 ;
— pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
— pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -tf(t)\mathrm{e}^{-xt} = -g_1(t)\mathrm{e}^{-xt}$ (avec la notation de la question 4) est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
— pour tout $(x,t) \in A \times \mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |g_1(t)|\,\mathrm{e}^{-Xt}$, et ce majorant $\varphi(t)$ est bien tel que φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable.

Toutes les hypothèses du théorème de Leibniz sont réunies ce qui nous assure que $\mathcal{L}(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} g(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[X, +\infty[$, avec :

$$\forall x > X, \qquad \mathcal{L}(f)'(x) = -\int_{\mathbb{R}^+} g_1(t)\mathrm{e}^{-xt}dt = -\mathcal{L}(g_1)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $X > 0$, on peut conclure :

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1, \text{ avec } \mathcal{L}(f)' = \mathcal{L}(g_1).}$$

Rappel : je ne suis pas psychorigide[2]*. J'accepterai donc de lire vos preuves, si à la place de tirets, vous avez plutôt mis des astérisques, des carrés, des ronds voire des numéros. Bien entendu, si tout est en vrac, ça va par contre directement à la poubelle.*

(b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. La question précédente nous assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Mais sa dérivée est (l'opposé de) la transformée de Laplace de g_1. Et comme g_1 est elle-même dans E, sa transformée de Laplace est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée (l'opposé de) la transformée de Laplace de g_2. Ainsi, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\mathcal{L}(f)'' = \mathcal{L}(f_2)$.
La question précédente nous permettrait ainsi de montrer par récurrence la proposition[3] $\mathcal{P}(n)$: «$\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$, avec $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(f_n)$».
Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } f \in E, \text{ alors } \mathcal{L}(f) \in \mathcal{C}^\infty, \text{ avec pour tout } n \geqslant 0,\ \mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n).}$$

On aura noté le gain spectaculaire de régularité dans le passage de f à sa transformée de Laplace.

PARTIE II : Comportements asymptotiques de la transformée de LAPLACE

7. (a) Pour $x > 0$, on a $\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}dt$. À $t > 0$ fixé, on a $f(t)\mathrm{e}^{-xt} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on peut raisonnablement penser d'une part que $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et d'autre part que ça doit pouvoir se montrer par convergence dominée.
C'est vrai pour le premier point... et aussi pour le second, mais dans ce cas attention à bien se ramener au théorème de convergence dominée du programme. On s'y ramène en prouvant que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, on a $\mathcal{L}(f)(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La domination se passe sans problème, mais il faut tout de même faire attention à isoler $t = 0$. On conclut alors par caractérisation séquentielle d'une limite en $+\infty$.

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.}$$

Bon... en fait il y a bien plus simple[4] *: f étant bornée, on a :*

$$\forall x > 0, \qquad |\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}dt = \frac{\|f\|_\infty}{x} \cdots$$

2. **Aheum...**
3. Il est crucial de donner l'information «$\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^n$» dans la proposition.
4. Désolé...

(b) Plaçons nous sous les hypothèses de l'énoncé. La question 5 nous assure que f' est dans E, avec pour tout $x>0$, $\mathcal{L}(f')(x)=x\mathcal{L}(f)(x)-f(0)$. Mais on a supposé f' bornée, donc f' est dans F, et la question précédente nous assure que $\mathcal{L}(f')(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On en déduit le résultat demandé :

$$\boxed{\text{Sous les hypothèses de l'énoncé, } x\mathcal{L}(f)(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}f(0).}$$

8. (a) Il existe $A>0$ tel que pour tout $t\geqslant A$, $|f(t)-\ell|\leqslant 1$ (et pitié, épargnez nous les epsilons). On a alors pour tout $t\geqslant A$: $|f(t)|=|(f(t)-\ell)+\ell|\leqslant|f(t)-\ell|+|\ell|\leqslant|\ell|+1$. Par ailleurs, l'application f est continue sur le segment $[0,A]$, donc est bornée. Si on note B un réel tel que $|f(t)|\leqslant B$ pour tout $t\in[0,B]$, on a alors $|f(t)|\leqslant \mathrm{Max}(B,|\ell|+1)$ pour tout $t\geqslant 0$, donc f est bien bornée.

$$\boxed{f\in F.}$$

(b) On va opérer le changement de variable «$u=\dfrac{x}{a_n}$» directement dans $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f\left(\frac{x}{a_n}\right)dx$. D'une part le programme le permet ($x\mapsto\dfrac{x}{a_n}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même), et d'autre part parce que bon, ça va aller comme ça...
Ainsi :

$$\int_0^{+\infty}h_n(x)dx=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a_nu}f(u)a_ndu=a_n\mathcal{L}(f)(a_n).$$

On a montré ce qu'on voulait :

$$\boxed{a_n\mathcal{L}(f)(a_n)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f\left(\frac{x}{a_n}\right)dx.}$$

(c) Et si on appliquait le théorème de convergence dominée ? On pose pour cela $f_n(x)=\mathrm{e}^{-x}f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$. On a alors :
— pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux [5] ;
— pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}g(x)=\ell\mathrm{e}^{-x}$;
— l'application g est continue par morceaux ;
— pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ et tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)=\|f\|_\infty\mathrm{e}^{-x}$, avec φ qui est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème de convergence dominée s'applique, et nous assure que d'une part g et les f_n sont intégrables (super !), avec de plus :

$$\int_0^{+\infty}f_n(x)dx\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}g(x)dx=\ell.$$

Et ainsi :

$$\boxed{a_n\mathcal{L}(f)(a_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell.}$$

(d) On vient de montrer que si on pose $\psi(x)=x\mathcal{L}(f)(x)$, alors **pour toute** suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, on a $\psi(a_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$. Ceci prouve **par caractérisation séquentielle de la limite** que $\psi(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ell$, c'est-à-dire $x\mathcal{L}(f)(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ell$, donc :

$$\boxed{\text{Si } \ell\neq0, \text{ alors } \mathcal{L}(f)(x)\sim\frac{\ell}{x}\cdot}$$

9. (a) Pour appliquer le théorème fondamental auquel on pense... ben il faut s'y ramener ! On note donc qu'en posant $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)dt$, alors $R(x)=I-S(x)$, avec $S(x)=\displaystyle\int_0^xf(t)dt$. L'application f est continue (tout court !), donc S est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $S'=f$. Et ainsi :

$$\boxed{R \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+, \text{ avec } R'=-f.}$$

5. Rappel : l'intégrabilité (facile ici, certes) sera fournie dans les conclusions du théorème.

Attention à ne pas appliquer la question 5... à R qui n'est pas particulièrement croissante[6] *!*
À défaut de pouvoir utiliser la question 5, on peut tenter de reprendre le principe de la preuve, en faisant une intégration par parties (licite, car R est de classe $\mathcal{C}^1$). On fixe pour cela $T > 0$. On a alors :

$$\int_0^T R'(t)\mathrm{e}^{-xt}dt = \left[R(t)\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^T + x\int_0^T R(t)\mathrm{e}^{-xt}dt. \qquad (R)$$

Lorsque T tend vers $+\infty$, puisque $R' = -f \in E$, le membre de gauche de (R) tend vers $\mathcal{L}(f)(x)$. Puisque R est bornée (est continue et tend vers 0 en $+\infty$), le terme tout intégré de (R) tend vers $R(0)$ lorsque T tend vers $+\infty$. Et comme $R \in F \subset E$, l'intégrale du membre de droite de (R) tend vers $x\mathcal{L}(R)(x)$. Il n'y a plus qu'à recoller les morceaux, en faisant tendre T vers $+\infty$ dans (R) :

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x).}$$

(b) On se souvient que $R(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$, donc $R(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui justifie l'existence de $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
On souhaite maintenant montrer : $|x\mathcal{L}(R)(x)| \leqslant \varepsilon$. Avec trois inégalités triangulaires, on obtient :

$$|\mathcal{L}(R)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-xt}dt\right| \leqslant \int_0^A |R(t)|\,\mathrm{e}^{-xt}dt + \underbrace{\int_A^{+\infty} \underbrace{|R(t)|}_{\leqslant\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-xt}dt}_{\leqslant \varepsilon\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}dt = \varepsilon/x}.$$

Il n'y a plus qu'à multiplier cette inégalité par $x > 0$ et utiliser le résultat de la question précédente pour obtenir :

$$\boxed{|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x\int_0^A |R(t)|\,dt + \varepsilon.}$$

(c) Avec A fixé comme plus haut, on prend maintenant $x_0 = \varepsilon\left(\displaystyle\int_0^A |R(t)|\,dt\right)^{-1}$. Pour $x \in]0, x_0]$, on a alors $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant 2\varepsilon$.
Les questions précédentes montrent

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists x_0 > 0; \quad 0 < x \leqslant x_0 \implies |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant 2\varepsilon;$$

ainsi, $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} R(0)$.

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ se prolonge en une fonction continue en 0, avec comme valeur limite } R(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt.}$$

Notons qu'il est tout de même assez raisonnable qu'on ait $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}f(t)dt \underset{x\to0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)dt$. *Et d'ailleurs, on aurait pu obtenir ce résultat par simple application du théorème de convergence dominée. Tout ça pour ça, direz vous... Et bien pas tout à fait. Si on regarde la preuve de plus près, elle peut s'étendre au cas où f est non pas intégrable, mais possède une intégrale convergente :* $\displaystyle\int_0^T f(t)dt \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. *Et là, le théorème de convergence dominée ne s'applique plus !*

6. Je sais, si maintenant on doit vérifier les hypothèses...

PARTIE III : Application

10. (a) Tout d'abord, l'application f est continue sur $\mathbb{R}^+$, ce qui justifie son intégrabilité sur tout segment $[0,x]$, donc la définition de F. Ensuite, on intègre par parties pour obtenir une intégrale d'un terme en $O(1/t^2)$. Il faut faire attention à 0, donc on passe par 1 :

$$\forall x > 1, \qquad F(x) = F(1) + \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

L'application $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et est dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. C'est également le cas pour $\cos 1 - \dfrac{\cos x}{x}$, et donc :

$$\boxed{F(x) \text{ possède une limite finie lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

(b) L'intégrabilité de f est équivalente à celle de $|f|$, elle-même équivalente à l'existence d'une limite finie pour $\displaystyle\int_0^x |f|$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a $\displaystyle\int_0^{n\pi} |f| = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$. Or, si on fixe $k \geqslant 1$, on peut minorer u_k par $\displaystyle\int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+3\pi/4} \frac{|\sin t|}{t} dt$. Sur l'intervalle d'intégration, on a $\dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2(k+1)\pi}$, donc

$$\int_0^{n\pi} |f| \geqslant u_0 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et $\displaystyle\int_0^x |f(t)|\, dt$ ne possède donc pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{f \text{ n'est pas intégrable sur } [0,+\infty[.}$$

(c) On va bien entendu voir $\sin(t)$ comme une partie imaginaire, de sorte que l'intégrale demandée est elle-même la partie imaginaire de

$$\int_0^X \mathrm{e}^{it}\mathrm{e}^{-xt} dt = \int_0^X \mathrm{e}^{t(i-x)} dt = \frac{\mathrm{e}^{X(i-x)} - 1}{i - x} = \frac{(i+x)(1 - X\mathrm{e}^{-xX}\mathrm{e}^{iX})}{1+x^2}.$$

C'est la partie imaginaire qui nous intéresse. Si on a encore les idées claires sur la partie imaginaire de $(a+bi)(c+di)$, on peut alors conclure sans tout développer :

$$\boxed{\int_0^X (\sin t)\mathrm{e}^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - X\mathrm{e}^{-xX}\cos X - xX\mathrm{e}^{-xX}\sin X\right) = \frac{-1}{1+x^2}\left(\mathrm{e}^{-xX}\left(x\sin X + \cos X\right) - 1\right).}$$

La fonction $t \mapsto (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^{945}}$ au voisinage de $+\infty$, donc :

$$\boxed{t \mapsto (\sin t)\mathrm{e}^{-xt} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.}$$

Dans la relation calculée plus haut, le membre de droite tend (puisque $x > 0$) vers $\dfrac{1}{1+x^2}$ lorsque X tend vers $+\infty$. Celui de gauche tend vers $\int_0^{+\infty} (\sin t)\mathrm{e}^{-xt} dt$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\sin t)\mathrm{e}^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}.}$$

(d) *Le sujet valide ce que j'ai raconté à la fin de la question* 9...

Notre inégalité de convexité préférée nous assure que $|f(x)| \leqslant 1$ pour $x \in]0, \pi/2]$. Cette inégalité reste vraie pour $x = 0$ et pour $x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ (puisqu'alors $|f(x)| \leqslant \dfrac{2}{\pi} < 1$). Par ailleurs, f est continue. Ainsi, f est dans F donc dans E.

Les hypothèses de a question 6.(a) sont vérifiées, ce qui nous assure que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$, avec $g_1(t) = tf(t) = \sin t$. Le calcul précédent nous assure alors :

$$\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(g_1)(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Il existe alors une constante K telle que pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = K - \operatorname{Arctan}(x)$.

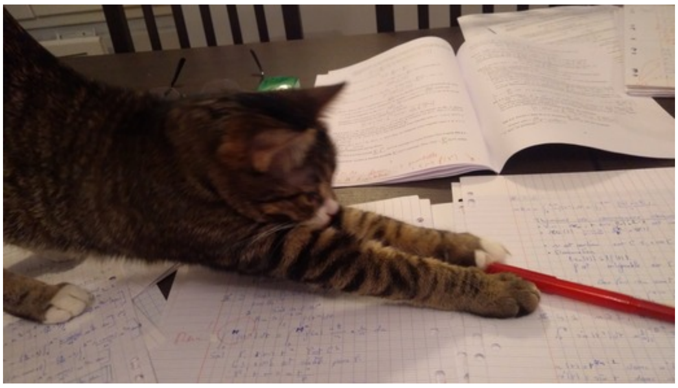
Puisque $f \in F$, on a par ailleurs d'après la question 7.(a) : $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $K = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement :

$$\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Il n'y a plus qu'à recoller les morceaux :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2}.}$$



SESSION 2011 MP

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 1

BULTEAU Guillaume

Thème

Ce sujet comportait un exercice sur les séries entières et un exercice sur les équations différentielles avec une étude du prolongement des solutions.

Ensuite, un problème avait pour but de faire étudier les propriétés élémentaires de la transformation de Laplace et des transformées de Laplace. Il se terminait par un calcul classique de l'intégrale de Dirichlet.

Observations générales

Erreurs les plus fréquentes
Pour le prolongement des solutions d'une équation différentielle, beaucoup de candidats se contentent de prolonger par continuité.

Les hypothèses de domination dans le théorème de convergence dominée et dans le théorème de Leibniz sont mal maîtrisées.

Pour beaucoup de candidats, lorsque f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ qui est croissante et majorée, alors f' est bornée.

Remarques sur le texte et sa compréhension
Les exercices, plutôt faciles, ont été abordés par une grande majorité des candidats, mais peu traités en totalité.

Le problème, relativement court, a été bien compris dans son ensemble par les candidats et souvent abordé dans sa quasi-totalité.

Il y avait une petite imprécision de notation à la question 10.a (double emploi de la lettre F qui désignait déjà un espace de fonctions) qui n'a, semble-t-il, pas du tout pénalisé les candidats.

Bilan

Le sujet a bien joué son rôle, qui est de trier les candidats. Il comportait un certain nombre de questions assez simples, permettant à tous les candidats de s'exprimer, mais aussi un nombre suffisant de questions plus délicates, permettant de départager les meilleurs.

Les copies sont assez bien présentées dans l'ensemble mais il est regrettable que le soin de certaines laisse grandement à désirer, ce qui pénalise leurs auteurs.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- l'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice ;
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Ainsi un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir au moins la moyenne.

Remarques détaillées par question

Exercice 1

1. La règle de d'Alembert est souvent appliquée sans soin (valeur absolue, dénominateur).

2. Le cas particulier de $S(0)$ est souvent oublié.

3. Plusieurs candidats pensent qu'une série entière converge uniformément sur son disque de convergence. La limite a été souvent calculée à l'aide de l'expression trouvée à la question précédente.

Exercice 2

1. Question traitée convenablement quand elle a été abordée.

2. Beaucoup de candidats se contentent de regarder le prolongement par continuité en 0 des solutions de la question précédente.

Problème

1. Certains candidats ont répondu en argumentant. Pour la question 1.b), l'implication donnée est souvent la mauvaise.

2. (a) Beaucoup de majorations sans valeur absolue. La linéarité de l'intégrale a été souvent invoquée pour conclure.
   (b) Les candidats ont souvent oublié de montrer que $\subset E$.
   (c) Question traitée correctement dans l'ensemble.

3. Les deux sous-questions ont été généralement traitées correctement.

4. La valeur absolue a été souvent oubliée pour justifier que $g_n \in E$.

5. Question qui a rarement été traitée correctement, principalement la justification de $f' \in E$. En particulier, beaucoup de candidats affirment que f' est bornée puisque f est croissante et bornée.

6. L'hypothèse de domination dans le théorème de Leibniz est mal maîtrisée. Par exemple, la fonction qui sert à dominer les dérivées partielles dépend encore de x.

7. **(a)** Le théorème de convergence dominée a souvent été utilisé pour résoudre cette question.
(b) Question bien traitée en général.

8. **(a)** Question trop rarement traitée avec la précision souhaitée.
(b) Question bien traitée.
(c) L'hypothèse de domination est ici souvent oubliée ou incorrecte.
(d) La caractérisation séquentielle de la limite est très souvent oubliée.

9. **(a)** Un certain nombre de candidats appliquent ici à tort la question 5.a).
(b) Pas de problème dans l'ensemble.
(c) Question très peu traitée avec le soin nécessaire.

10. **(a)** Généralement bien fait. Quelques petits problèmes du type $t \to t^2$ est intégrable sur $0,+\infty$.
(b) Question en général assez bien traitée par ceux l'ayant abordée.
(c) Question très souvent traitée, même par des candidats n'ayant pas abordé les questions précédentes.
(d) Question traitée correctement, mais abordée seulement par quelques candidats.
