# Correction MATH II PC Mines 2017

## I. Exponentielle tronquée

1. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{(nx)^k}{k!} = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ donc la série $\sum \dfrac{(nx)^k}{k!}$ converge et le reste d'ordre $n$ est bien défini. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ R_n(x) \text{ est bien défini, et } T_n(x) + R_n(x) = e^{nx}.}$$

2. On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{nt}$. $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(k)}(t) = n^k\, e^{nt}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $f$ est $\mathcal{C}^{n+1}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $x$ à l'ordre $n$ :
$$\underbrace{f(x)}_{=e^{nx}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}.(x-t)^n\ dt = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.x^k}_{=T_n(x)} + \int_0^x \frac{n^{n+1} e^{nt}}{n!}(x-t)^n\ dt$$
D'où : $R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^x e^{nt}(x-t)^n\ dt$
On effectue le changement de variable $u = x - t$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :
$$\int_0^x e^{nt}(x-t)^n\ dt = \int_x^0 e^{n(x-u)} u^n (-du) = e^{nx} \int_0^x (ue^{-u})^n\ du$$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad R_n(x) = \frac{n^{n+1} e^{nx}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n\ du}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2} y^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{n^{n+1} y^n} = y\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y\,\underbrace{e^{\overbrace{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}^{\sim \frac{n+1}{n} \sim 1}}}_{\longrightarrow e^1}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = ye}$$

Si $y < e^{-1}$, alors $\dfrac{a_n + 1}{a_n} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} = \alpha$ avec $|\alpha| < 1$. Dans ce cas, d'après le critère d'Alembert, la série $\sum a_n$ converge. Et si elle converge, alors nécessairement, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$.

$$\boxed{\text{Si } y < 1, \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.}$$

4. La fonction $h : u \mapsto ue^{-u}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivée $h'(u) = (1-u)e^{-u}$. Cette dérivée ne s'annulant qu'en 1 et est positive sur $[0;1]$ et négative sur $[1;+\infty[$. Donc $h$ est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Pour tout $u \in [0,x]$, $h(u) \leqslant h(x)$. En posant $M := h(x)$, on voit que $M$ est un maximum de la fonction $h$ sur $[0,x]$. De plus, $M = h(x) < h(1) = e^{-1}$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \mapsto ue^{-u} \text{ admet sur } [0,x] \text{ un maximum } M \text{ tel que } M < e^{-1}.}$$

D'après ce que l'on vient de dire, $\displaystyle\int_0^x (ue^{-u})^n \, du \leqslant xM^n$ d'où :

$|R_n(x)| \leqslant e^{nx} x a_n$ où $a_n = \dfrac{n^{n+1}M^n}{n!}$. Comme $M < e^{-1}$, $xa_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $R_n(x) = o(e^{nx})$.

$$\boxed{\text{Si } x \in ]0;1[, \quad R_n(x) = o(e^{nx})}$$

On rappelle que $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x)$ d'où $T_n(x) - e^{nx} = o(e^{nx})$.

$$\boxed{\text{Si } x \in ]0;1[, \quad T_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{nx}}$$

5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$.

   Initialisation :

   $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$

   La propriété est donc vraie au rang initial.

   Hérédité :

   Considérons un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$.

   Alors $n! \underbrace{=}_{\text{IPP}} \underbrace{\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \displaystyle\int_0^{+\infty} -\dfrac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} \, dt$ d'où $(n+1)n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \, dt$ ce qui conclut la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt}$$

6. Montrons tout d'abord que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du \frac{n^{n+1}}{n!} = 1$.

   Par le changement de variable $nu = t$, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \, \frac{dt}{n} = \frac{1}{n^{n+1}}.n!$

$$\begin{aligned} T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) &= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du \; - \; e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n \, du \\ &= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \left( \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du - \int_0^x (ue^{-u})^n \, du \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du}$$

7. Si $x > 1$ alors, comme $f$ est décroissante sur $[x, +\infty[$, $ue^{-u} \leqslant xe^{-x}$. En intégrant l'inégalité $(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ entre $x$ et $+\infty$ on obtient $\dfrac{R_n(x)}{e^{nx}} \leqslant \dfrac{n^{n+1}y^n}{n!} M$ avec $y = xe^{-x} < e^{-1}$ et $M = (xe^{-x})^{-1} \displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u} du$. Donc $\dfrac{R_n(x)}{e^{nx}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0$ :

$$\boxed{\text{Si } x > 1, \quad R_n(x) = o(e^{nx})}$$

# II. Méthode de Laplace

8. Supposons que $f'(0) \neq 0$. Alors $f(x) - 1 \sim xf'(0)$ au voisinage de 0. Or le terme de gauche est toujours strictement négatif d'après $(H3)$, tandis que le terme de droite change de signe strictement en 0. C'est absurde.

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

On écrit $f(x) = 1 + g(x)$ avec $g(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. $\varphi(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln(1+g(x)) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}g(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{1}{2}}$$

9. Supposons que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ n'est égal à 0. Alors, on peut prolonger $\varphi$ par continuité sur le segment $[-1;1]$ en posant $\varphi(\pm 1) = -\ln(f(\pm 1))$. $\varphi$ admet donc un minimum sur $[-1;1]$. Ce minimum -notons le a- est strictement positif puisque $\varphi$ est elle-même strictement positive sur $[-1;1]$. En particulier, $\varphi$ minorée sur $]-1;1[$ par a.
Si $f(-1)$ ou $f(1)$ est nul. Supposons par exemple que $f(1) = 0$. Alors $\varphi$ diverge vers $+\infty$ en 1. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\varphi \geqslant 1$ sur $[1-\epsilon;1[$. Par ailleurs, $\varphi$ est continue sur $[0;1-\epsilon]$, elle y admet donc un minimum $m_1 > 0$. $\varphi$ est minorée par $a_1 := \min(m_1;1)$ sur $[0;1[$.
De même en $-1$ si $f(-1) \neq 0$. Si $f(-1) = 0$, on est ramené au cas précédent. Dans tous les cas, $\varphi$ admet un minorant $a_2 > 0$ sur $]-1:1]$.
On prend $a := \min(a_1;a_2)$. Soit $x \in ]-1;1[$. $-\dfrac{1}{x^2}\ln(f(x)) \geqslant a \Rightarrow f(x) \leqslant e^{-ax^2}$. Par continuité des fonctions $f$ et $x \mapsto e^{-ax^2}$ en $-1$ et 1, cette inégalité reste vraie pour $x = \pm 1$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est minorée par un réel } a \text{ strictement positif tel que pour tout } x \in [-1;1[, \text{ on ait : } f(x) \leqslant e^{-ax^2}.}$$

10. La fonction $g_n$ est continue sur $[-\sqrt{n};\sqrt{n}]$ en tant que composée de fonctions continues. Elle est trivialement continue sur $]-\infty;-\sqrt{n}]$ et sur $[\sqrt{n};+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ g_n \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $u \in \mathbb{R}$. A partir d'un certain rang, $u \in [-\sqrt{n};\sqrt{n}]$ donc :
$g_n(u) = \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{-u^2\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}$ APCR. Or $\varphi\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) = \dfrac{1}{2}$.
Donc $g_n(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (g_n)_n \text{ converge simplement vers la fonction } g : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}.}$$

11. Posons $I_n := \displaystyle\int_{-1}^{1} (f(x))^n \ dx$. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$ :
$I_n = \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \ \frac{du}{\sqrt{n}}$ d'où $\sqrt{n}I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{TCD}{\longrightarrow}} \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{2\pi}$. Il reste à justifier l'utilisation du Théorème de Convergence Dominée :
   i) $(g_n)$ est une suite de fonctions continues par morceaux convergeant simplement vers une une fonction $g$ également continue par morceaux.
   ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$, $|g_n(u)| \leqslant g(u) = e^{-au^2}$. L'inégalité est claire si $u \in ]-\infty;-\sqrt{n}[\cup]\sqrt{n},+\infty[$. Sinon, $\dfrac{u}{\sqrt{n}} \in [-1;1]$ et dans ce cas, on dispose de l'inégalité $f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right) \leqslant e^{-a\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2}$ qui élevée à la puissance $n$ nous donne $g_n(u) \leqslant e^{-au^2}$.
   iii) $g$ est une fonction positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $a > 0$).

$$\boxed{\int_{-1}^{1} (f(x))^n \ dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

## III. Formule de Stirling

12. Partons du membre de droite : $e^{-n}(I_n+J_n) = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty}(1+x)^n e^{-n(x+1)}\,dx \underset{u=n(x+1)}{=} \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{n}\right)^n e^{-u}\,\frac{du}{n} = \frac{n!}{n^{n+1}}$ d'après la question 5.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\quad n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n+J_n)}$$

13. On pose $h : [1;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2^x - x - 1$. $h$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $h'(x) = (\ln 2)2^x - 1$ et $h''(x) = (\ln 2)^2 2^x \geqslant 0$. Donc $h'$ est croissante. Or $h'(1) = 2\ln 2 - 1 \geqslant 0$. Donc $h'$ est positive d'où $h$ est croissante : pour tout $x\geqslant 1, h(x)\geqslant h(1) = 0$ *i.e.* $2^x - x - 1 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x\geqslant 1,\quad x+1\leqslant 2^x.}$$

D'après ce qui précède, $J_n \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty}(2^x)^n e^{-nx}\,dx = \int_1^{+\infty} e^{n(\ln 2-1)x}\,dx = \left[\frac{e^{n(\ln 2-1)x}}{n(\ln 2-1)}\right]_1^{+\infty}$.

D'où $J_n \leqslant \dfrac{e^{n(\ln 2-1)}}{n(1-\ln 2)} \leqslant \dfrac{1}{n(1-\ln 2)}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ J_n\leqslant\frac{C}{n}\text{ où } C = \frac{1}{1-\ln 2}.}$$

14. On pose $f(x) = (1+x)e^{-x}$ de sorte que $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}(f(x))^n\,dx$. $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

(**H1**) $f(0) = 1$ est clair.
(**H2**) $f''(x) = (-1+x)e^{-x}$ donc on a bien $f''(0) = -1$.
(**H3**) Soit $x\in]-1;1[\backslash\{0\}$. On a bien $f(x)>0$. D'autre part, l'inégalité de convexité de l'exponentielle s'écrit $e^x\geqslant x+1$ (l'égalité n'ayant lieu qu'en 0) d'où $f(x) = (1+x)e^{-1} < 1$.
(**H4**) $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2e^{-1}$. Sachant que $e\approx 2,67$, on a bien $f(-1), f(1)\in[0;1[$.

D'après la question 11 :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

15. D'après les questions précédentes, $J_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $I_n = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $J_n = o(I_n)$ et $I_n+J_n\sim I_n$.
On a alors $n!\sim n^{n+1}e^{-n}I_n\sim n^{n+1}e^{-n}\sqrt{2\pi}n^{-\frac12}$ d'où :

$$\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

## IV. Formule de Bernstein

16. La question 2 nous donne $R_n(1) = \dfrac{n^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 u^n e^{(1-u)n}\,du \underset{t=1-u}{=} \frac{n^{n+1}}{n!}\int_1^0(1-t)^n e^{nt}\,(-dt)$ :

$$\boxed{R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n e^{nt}\,dt}$$

17. On identifie l'intégrale ci-dessus comme étant $\displaystyle\int_0^1(f(-t))^n\,dt$ où $f$ est la fonction introduite à la question 14. On vérifie sans peine que la fonction $t\mapsto f(-t)$ vérifie les mêmes hypothèses que $f$. La question 11 nous donne un équivalent de cette intégrale quand $n\to+\infty$.
$R_n(1)\sim\dfrac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi}n^n n^{\frac12}e^{-n}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{n^{\frac12}}\sim\dfrac{e^n}{2}$.

$$\boxed{R_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}}$$

Comme $T_n(1) + R_n(1) = e^{1.n}$ d'après la question 1, $T_n(1) = e^n - \frac{e^n}{2} - o\left(\frac{e^n}{2}\right) = \frac{e^n}{2} + o\left(\frac{e^n}{2}\right)$.

$$\boxed{T_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}}$$

## V. Première répétition

18. Je propose le code suivant :

```
def X(liste):

M=[liste[0]]
i=1
while liste[i] not in M:   % on teste si l'élément regardé a déjà été enregistré
  M.append(liste[i])            comme appartenant à la liste liste.
  i=i+1
return i+1                 % car les listes en python sont indicées à partir de 0.
```

19. $P(X = k) = \frac{A_k}{\text{Card}(\Omega)}$ où $A_k = \text{Card}(X^{-1}(\{k\}))$ puisque le tirage d'un élément $w$ de $\Omega$ est uniforme (ceci vient du fait que les VAD $U_j$ sont uniformes et indépendantes). Pour que $P(X = k) \neq 0$, il suffit que $X^{-1}(\{k\})$ soit non vide. $w = (1, 2, \dots, k-1, 1, 1\dots, 1)$ est tel que $X(w) = k$ donc :

$$\boxed{\forall k \in [\![2; n+1]\!], \quad P(X = k) \neq 0}$$

20. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. $(\{X > k\}, \{X \leqslant k\})$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X > k+1) = P(X > k+1 | X > k)P(X > k) + P(X > k+1 | X \leqslant k)P(X \leqslant k)$$

Or $P(X > k+1 | X \leqslant k) = 0$ d'où :

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n-1]\!], \quad P(X > k+1) = P(X > k+1 | X > k)P(X > k)}$$

21. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Comme $P(X = i)$ est non nul pour $i = 1, \dots, k-1$ :
$P(X > k) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{P(X > i+1)}{P(X > i)}.P(X > 1) = \prod_{i=1}^{k-1} P(X > i+1 | X > i)1.$
Or $P(X > i+1 | X > i)$ est la probabilité que le $i+1$-ème élément est différent des $i$ premiers sachant que ceux-ci sont distincts deux à deux. Le $i+1$-ème élément peut donc prendre $n-i$ valeurs possible, et comme $U_{i+1}$ est uniforme sur $[\![1; n]\!]$ : $P(X > i+1 | X > i) = \frac{n-i}{n}$.
$P(X > k) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} = \frac{n!}{n^k(n-k)!}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n]\!], \quad P(X > k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!}}$$

22. Pour des facilités de calculs, on considère que la v.a. X peut prendre la valeur 1 avec une probabilité nulle.
$E(X) = \sum_{k=1}^{n+1} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k} P(X = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=i}^{n+1} P(X = k) = \sum_{i=1}^{n+1} P(X \geqslant i) = \sum_{i=0}^{n} P(X > i).$

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{n} P(X > k)}$$

23. $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^n (n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{n^n} T_n(1)$.

    Or d'après la question 17, $T_n(1) \sim \dfrac{e^n}{2}$ d'où $E(X) \sim \dfrac{\sqrt{2\pi n}}{n^n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n . \dfrac{e^n}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi n}{2}}$ d'où :

$$\boxed{E(X) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}}$$

∗ ∗ ∗ Fin de la correction ∗ ∗ ∗

Q 14. Question centrale, souvent abordée. La rédaction n'est pas toujours satisfaisante : l'inégalité triangulaire est souvent escamotée, le rôle de la positivité des coefficients mal expliqué. De très grosses confusions dans certaines copies faibles (les coordonnées de $AX$ sont incorrectes).
Q 15. Cette question, souvent abordée, demandait du soin et a rarement été complètement traitée. Une réponse correcte demandait de préciser le caractère stochastique de $A^p$ (conséquence de Q11) et d'écrire précisément les inégalités, en mettant en lumière l'importance de la stricte positivité des coefficients.
Q 16. Pas mal de réponses aberrantes et de confusions ( je prends $p=1$) ; assez rares sont les candidats qui dégagent nettement les éléments la preuve (l'inclusion triviale vient de Q11, l'autre de l'inclusion du noyau de $A-I_n$ dans celui de $A^p-I_n$ et de la question précédente).
Q 17. Question facile, qui pouvait être traitée de diverses façons, honorablement réussie et a permis des grappillages de points. Mais encore une fois, oubli assez récurrent de la positivité.
Q 18. Question de synthèse, traitée avec efficacité dans les bonnes copies, mais souvent réduite à un empilement d'affirmations sans références précises aux questions antérieures.
Q 19. Beaucoup de candidats se rappellent un exercice traité en classe (description des matrices de rang $1$ comme produit colonne-ligne sans voir qu'ici $U$ est imposée (comme image de $P$), ce qui nécessitait un bon recul. On relève beaucoup de fautes de logique, consistant à prétendre prouver l'égalité à partir du fait que $UL$ vérifie des propriétés analogues à celles de $P$.
Q 20. Cette question demandait également un bon recul sur le sujet. Seules les très bonnes copies produisent des réponses satisfaisantes et on observe beaucoup de tentatives (infructueuses) de bluff. L'unicité est très rarement traitée.
Q 21. Cette question demandait de bien comprendre le sujet. À partir de l'égalité $LA^p=L$, la stricte positivité des coefficients de $A^p$ fournissait le résultat. Peu de candidats l'ont vu.
Q 22. Question délicate, très rarement résolue. Confusion fréquente entre la multiplicité et la dimension du sous-espace propre.
QQ 23-24. Quelques rares candidats ont montré qu'ils avaient bien compris le thème du problème en répondant correctement à cette question. Certains n'ont pas réalisé que le calcul de la loi invariante avait été fait dans la partie **I**.

### 1.2.4.Mathématiques II — PC

- Remarques générales

Le problème proposé était consacré à une estimation du temps moyen de première répétition d'un processus aléatoire simple. Pour obtenir cette estimation, on commençait par établir quelques résultats asymptotiques liés aux sommes partielles de la série exponentielle.
Le sujet avait été conçu pour être abordable et raisonnablement progressif, mais le jury a constaté que, bien souvent, un grand nombre de notions de base n'étaient pas maîtrisées par les candidats, et que leurs réponses (y compris aux questions les plus faciles) manquaient de justifications satisfaisantes.

Le sujet était composé de 5 parties, les 4 premières aboutissant à une estimation de $T_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ et la dernière étant probabiliste.

- Remarques particulières

Première partie

- À la question 2, une petite moitié de candidats sait écrire correctement la formule de Taylor avec reste intégral.
- Dans la question 3, un trop grand nombre de candidats croit que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1$. Par ailleurs, la minoration par $0$ d'une suite décroissante n'implique pas sa convergence vers $0$. Dans cette même question la règle de d'Alembert – très souvent invoquée à juste titre par les candidats – est souvent présentée comme une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série.
- Dans la question 4, beaucoup d'erreurs dans la dérivation de $u \mapsto ue^{-u}$.

Deuxième partie

- À la question 8, la plupart des candidats notent que la fonction $f$ présente un maximum local en $0$, mais oublient de préciser qu'$0$ est un point *intérieur* de l'intervalle de référence pour pouvoir conclure correctement que $f'(0)=0$.
- La question 9 a été très rarement bien traitée. En général, une fonction continue sur l'intervalle *ouvert* $]-1,1[$ et strictement positif n'est pas minorée par un réel strictement positif.
- À la question 10 la continuité par morceaux de $g_n$ a rarement été correctement justifiée, la définition en étant manifestement très floue dans l'esprit de la majorité des candidats. Il suffisait d'étudier les limites à gauche/droite de $g_n$ en $\pm\sqrt{n}$ (à $n$ fixé bien entendu). Rappelons que la régularité continue par morceaux n'est pas stable par composition. Par ailleurs, beaucoup de candidats majorent étonnamment $g_n(u)$ pour montrer la convergence demandée.
- À la question 11, un certain nombre de candidats se contente d'invoquer "la formule de l'intégrale de Gauss" pour justifier le passage à la limite sous le signe intégral, en lieu et place d'une application du théorème de convergence dominée auquel le texte conduisait naturellement.

Troisième partie

- À la question 13, de trop nombreux candidats se trompent dans le calcul de la dérivée de $x \mapsto 2^x$.
- À la question 14, il convenait de vérifier avec soin que la fonction $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ vérifie les hypothèses de la partie II.
- À la question 15, il était insuffisant d'affirmer que $J_n \to 0$ pour en déduire que $I_n + J_n \sim I_n$, mais il fallait expliquer pourquoi $J_n = o(I_n)$.

Quatrième partie

- À la question 17, le passage de l'estimation de $R_n(1)$ à celle de $T_n(1)$ n'a pas été toujours correctement justifié.

Cinquième partie

- Dans la question 18, beaucoup de candidats introduisent de l'aléatoire dans l'algorithme avec une fonction random ou randint.

- La question 19 a été rarement bien traitée, et le jury a regretté de lire le plus souvent de longs développements confus, alors qu'il suffisait d'exhiber un événement de probabilité strictement positive inclus dans l'événement $(X = k)$.
- Dans la question 20, trop de candidats écrivent sans justification l'égalité $P(X > k+1, X > k) = P(X > k+1)$ sans en donner la raison : l'inclusion $(X > k+1) \subset (X > k)$.
- La question 22 (de cours) a été traitée moins souvent qu'attendu.

- Conseils aux candidats

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention aux points suivants.

- Rédiger de façon efficace. Trop de candidats perdent beaucoup de temps en des développements qui partent d'une bonne intention, mais sont beaucoup trop longs. Par exemple, il est louable de montrer la convergence des intégrales rencontrées, ou de justifier la possibilité de faire tel changement de variable. Mais cela doit prendre quelques lignes, et non quelques pages...
- Soigner la rédaction : les correcteurs ne peuvent attribuer la totalité des points qu'aux réponses complètes et précises. Ce point n'est pas en contradiction avec le précédent : il y a là un équilibre à trouver, qui est constitutif de l'épreuve.
- Consolider sa maîtrise des techniques asymptotiques : le jury a à ce sujet déploré des limites quand $n \to +\infty$ qui dépendaient de $n$, des développements limités sans reste, ou encore des manipulations douteuses des équivalents.
- Écrire proprement, et mettre en valeur les arguments et résultats essentiels grâce à une présentation soignée. Les copies illisibles et celles sur lesquelles le correcteur passe plus de temps à chercher les réponses qu'à vérifier leur justesse ont été lourdement pénalisées.
- Ne pas "tricher" : les correcteurs sanctionnent inéluctablement toute tentative d'escroquerie.
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de commencer à rédiger, afin de bien saisir les objectifs et l'organisation du texte.

- Conclusion

Le jury s'est réjoui de lire un certain nombre de copies vraiment excellentes, qui témoignent d'une grande maturité scientifique et d'une réelle autonomie intellectuelle. Toutefois, dans la plupart des cas, les candidats ont manifesté, souvent faute d'une attention suffisante, des faiblesses qui étaient évitables, aussi bien dans les parties théoriques (convergence dominée, extrême d'une fonction continue sur un segment) que calculatoires. Le jury ne peut que recommander une fois encore aux candidats de s'appuyer sur une solide connaissance du cours, et de ne surtout pas négliger l'entraînement technique indispensable à toute pratique scientifique.

### 1.2.5. Mathématiques I — PSI

Ce sujet comportait beaucoup de questions simples et quelques questions délicates. Il est alors impératif de faire extrêmement attention à la rédaction : entre une moyenne et une bonne copie, la différence se joue parfois à ce qui peut apparaître comme des détails qui révèlent la compréhension ou entretiennent le doute (voir notamment les questions 4, 11 et 14).