1 Un résultat classique... amélioré

1. (a) Euh... si $\lambda \in \mathbb{K}$ est fixé, alors quel que soit $x \in E$, la famille $(x, \lambda x)$ est assurément liée !

   (b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La famille $(e_i, u(e_i))$ est liée et $e_i \neq 0$, donc il existe λ_i tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

   $$\boxed{\text{La matrice de } u \text{ dans la base } \mathcal{E} \text{ est donc diagonale.}}$$

   $$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Évidemment à ce stade, chaque e_i « possède un λ personnel, potentiellement différent de celui des autres». Évidemment...

   (c) D'une part, $u(e_1 + e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, et d'autre part il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_1 + e_2) = \lambda(e_1+e_2)$. On a alors $(\lambda_1-\lambda)e_1+(\lambda_2-\lambda)e_2 = 0$, donc par liberté de (e_1, e_2) : $\lambda_1-\lambda = \lambda_2-\lambda = 0$ puis $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$. De la même façon, $\lambda_i = \lambda_1$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, donc $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E})$ est en fait une « matrice scalaire » :

   $$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}) = \lambda_1 I_n = \mathrm{Mat}(\lambda_1 \mathrm{Id}_E, \mathcal{E}),$$

   et donc (il y a derrière l'*injectivité* de $f \mapsto \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E})$) :

   $$\boxed{u = \lambda_1 \mathrm{Id}_E, \text{ et } u \text{ est bien une homothétie.}}$$

2. (a) Encore une fois, il est clair que pour tout $x \in E$, $(\lambda x + \varphi(x)y, x, y)$ est liée !
   Si ce n'est pas clair, pas de drame, mais il faut ***vraiment*** *que vous réfléchissiez à la question : « comment montrer qu'une famille (x, y, z) est liée ? ». Aller voir dans son cours à ce stade est vraiment inutile.*

   (b) On ne peut a priori rien dire sur $f(y_0)$: le fait que $(f(y), y, y)$ soit liée est une information assez faible ! Mais je sais hélas que beaucoup en auront déduit que $f(y_0)$ est colinéaire à y_0...
   Par contre, $(u(f_2), f_1, f_2)$ est liée **alors que** (f_1, f_2) **est libre**, donc il existe $(\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u(f_2) = \lambda_2 f_1 + \mu_2 f_2$. Ceci est également valable pour $u(f_k)$ dès que $k \geqslant 2$. Comme on a fini par comprendre le mystérieux théorème 1-2-3-4-5...

   $$\boxed{\text{On a donc } \mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \alpha_2 & \mu_2 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_n & (0) & & \mu_n \end{pmatrix}}$$

   (c) D'une part, $u(f_2 + f_3) = (\lambda_2 + \lambda_3)f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3$, mais d'autre part, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $u(f_2 + f_3) = \lambda f_1 + \mu(f_2 + f_3)$, donc

   $$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda)f_1 + (\mu_2 - \mu)f_2 + (\mu_3 - \mu)f_3 = 0,$$

   et la liberté de (f_1, f_2, f_3) nous assure que $\mu_2 - \mu = \mu_3 - \mu = 0$, donc $\mu_2 = \mu_3$, et par le même procédé, tous les μ_i sont égaux, et donc en notant μ cette valeur commune :

   $$\boxed{\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \alpha_2 & \mu & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_n & (0) & & \mu \end{pmatrix}}$$

(d) D'une part, $u(f_1+f_2)$ peut se lire sur la matrice, mais d'autre part il existe $\lambda, \mu' \in \mathbb{K}$ tels que $u(f_1+f_2) = \lambda f_1 + \mu'(f_1+f_2)$, et donc :

$$((\alpha_1+\lambda_2) - (\lambda+\mu'))\, f_1 + ((\alpha_2+\mu) - \mu')\, f_2 + \alpha_3 f_3 + \cdots + \alpha_n f_n = 0.$$

La liberté de $\mathcal{F}$ nous assure alors que pour tout $i \geqslant 3$, on a $\alpha_i = 0$. En considérant $u(f_1+f_3)$, on obtiendrait de même $\alpha_2 = 0$, et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Mat}(u,\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ & \mu & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \mu \end{pmatrix}}$$

(e) On a maintenant, en notant $\lambda_1 = \alpha_1 - \mu$: $\mathrm{Mat}(u - \mu \mathrm{Id}_E, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Soit φ l'unique application linéaire (de E dans $\mathbb{R}$) définie par l'image de $\mathcal{F}$ de la façon suivante : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(f_i) = \lambda_i$.
Le cours nous assure qu'il existe bien une unique application linéaire vérifiant les relations précédentes.
On a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(u-\mu)(f_i) = \lambda_i f_1 = \varphi(f_i) f_1$. Ainsi, l'application $x \mapsto u(x) - (\mu x + \varphi(x) f_1)$ est linéaire et nulle sur la base $\mathcal{F}$, donc est nulle tout court, et ainsi (en se rappelant que $f_1 = y_0$) :

$$\boxed{u \text{ est l'application } x \mapsto \mu x + \varphi(x) y_0.}$$

3. Si E est de dimension infinie, on peut reprendre tout ce que l'on a fait sauf les considérations matricielles. Si on admet l'existence d'une base $(e_i)_{i \in I}$ (ce qui est vrai et non trivial), alors les preuves précédentes restent valables, à quelques modifications syntaxiques près, et en enlevant les considérations matricielles, qui n'étaient finalement là que pour « visualiser » les choses.
Au moins pour le premier résultat on peut se passer des bases, en opérant probablement comme vous l'avez fait en première année pour traiter cet exercice avant de connaître la dimension finie : chaque x (non nul) possède son λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$; ensuite on montre que pour $x \neq y$ on a $\lambda_x = \lambda_y$, en discutant sur le caractère libre ou non de (x,y). Reconnaissez qu'avec une base (finie) c'est plus simple, non ?
Pour le second cas on peut aussi se passer de base (en travaillant dans le même esprit que dans le paragraphe précédent) mais la rédaction nécessite un peu de soin.

2 Un exercice d'oral

1. On fixe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) + P(X) = 0$. Si P était non nul, il aurait un terme dominant, disons αX^n. Mais alors en développant $P(X+1)+P(X)$ on trouverait le terme $2\alpha X^n$ en plus de termes de degré $< n$: c'est impossible puisque $P(X+1)+P(X) = 0$. Par l'absurde, on a bien montré :

$$\boxed{\text{Si } P(X+1)+P(X) = 0, \text{ alors } P = 0.}$$

2. Hum...
3. La question précédente nous invite à considérer l'application $P \mapsto P(X+1)+P(X)$ dont on vient de parler du noyau. Mais il s'agit ici de prendre une vraie initiative dans le choix des espaces (de départ et d'arrivée). On a vu que si $P \neq 0$, alors $P(X+1)+P(X)$ a le même degré que P. On peut donc considérer l'application $\Phi_n : P \in E = \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.
Il s'agit d'un endomorphisme de E, de noyau réduit à 0 d'après la question précédente. Il est donc injectif, et comme on est en dimension finie, il est bijectif [1], donc X^n possède un antécédent :

1. La preuve est aussi importante à mon avis que le résultat : on applique le théorème du rang, et on constate que l'image a la même dimension que l'espace d'arrivée, donc est égale à cet espace d'arrivée.

l'existence est prouvée. À ce stade, on a prouvé l'unicité (par bijectivité) de l'antécédent, mais attention : unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$!
Pour terminer la preuve de l'unicité, on a vu encore une fois que $P(X+1)+P(X)$ a le même degré que P, donc si $P(X+1)+P(X)=X^n$, alors P est de degré n, donc est égal à celui qu'on a trouvé dans ce qui précède.

$$\boxed{\text{Il existe bien un unique } P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(X+1)+P(X)=X^n.}$$

4. Soit $n \geqslant 1$. Déjà, on a :

$$(P_n(X+1)+P_n(X))' = (X^n)' = nX^{n-1} = n\left(P_{n-1}(X+1)+P_{n-1}(X)\right),$$

Mais par ailleurs, $(P_n(X+1)+P_n(X))' = P_n'(X+1)+P_n'(X)$, donc on a : $\Phi_n(P_n') = n\Phi_n(P_{n-1})$, ou encore $\Phi_n(P_n'-nP_{n-1})=0$, donc par injectivité de Φ_n :

$$\boxed{P_n' = nP_{n-1}}$$

Ainsi, « en primitivant P_{n-1} », on obtiendra un polynôme qui vaudra P_n à une constante près. Constante qu'on peut ajuster à l'aide de $P_n(1)+P_n(0)=0^n$.
Il reste à noter que le polynôme constant $P_0 = 1/2$ vérifie bien $P_0(X+1)+P_0(X)=1$.

$$\boxed{\text{Les relations } P_0 = 1/2,\ P_n' = nP_{n-1} \text{ et } P_n(1)+P_n(0)=0 \text{ permettent de calculer itérativement les } P_n.}$$

5. On a déjà vu :

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{2}\cdot}$$

Ensuite, $P_1' = 1/2$ donc $P_1 = \dfrac{X}{2}+K$, puis $2K+1/2=0$, donc $K=-1/4$.

$$\boxed{P_1 = \frac{X}{2}-\frac{1}{4}\cdot}$$

On continue avec $P_2' = X-1/2$ donc $P_2 = \dfrac{X^2}{2}-\dfrac{X}{2}+K$, puis $2K=0$ donc $K=0$

$$\boxed{P_2 = \frac{X^2}{2}-\frac{X}{2}\cdot}$$

Enfin, $P_3' = \dfrac{3}{2}X^2-\dfrac{3}{2}X$ donc $P_3 = \dfrac{X^3}{2}-\dfrac{3}{4}X^2+K$ avec $2K+1/2-3/4=0$ donc $K=1/8$:

$$\boxed{P_3 = \frac{X^3}{2}-\frac{3}{4}X^2+\frac{1}{8}\cdot}$$

3 Algèbre linéaire : commutant d'une matrice

1. Simples vérifications... quoique ; pour montrer que F est un sous-espace de E, que doit-on vérifier ?
— $F \subset E$;
— F est non-vide (par exemple parce qu'il contient 0_E) ;
— F est stable par combinaisons linéaires : si $v_1, v_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda v_1 + v_2 \in F$.
Mais on peut bien entendu (et c'est souvent pertinent) voir F comme *le noyau* ou *l'image* d'une application *linéaire*. L'astuce consistera à glisser un « qui est clairement linéaire » au bon endroit !
Pour ce qui nous concerne, $\mathcal{C}(A)$ peut être vu comme le noyau de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $B \mapsto AB-BA$, et $\mathbb{R}[A]$ est l'image de l'application (de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) $P \mapsto P(A)$.

$$\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ et } \mathbb{R}[A] \text{ sont des sous-espaces de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Le lecteur qui n'avait pas vu ces arguments est invité à vraiment *vérifier le caractère linéaire des applications en jeu ; la première étape consistant à leur donner un nom.*
Pour l'inclusion, on constate que $A.P(A) = P(A).A$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, de sorte que :

$$\boxed{\mathbb{R}[A] \subset \mathcal{C}(A).}$$

Ici encore, le lecteur non convaincu doit absolument vérifier la relation $P(A).A = A.P(A)$, sans quoi il passera SYSTÉMATIQUEMENT à côté de ce type d'argument.

2. On trouve comme on veut (mais sans confondre « il faut » et « il suffit »...) :

$$\boxed{A^2 = 4A - 3I_3.}$$

Je me répète, mais ici encore, ceux ayant écrit « donc $\lambda = 4$ et $\mu = -3$ » confondent le nécessaire et le suffisant, l'existence et l'unicité. Ne passez pas à la suite avant d'avoir compris cela : vous avez maintenant compris que je ne vous lâcherai pas !

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$: la division euclidienne de P par $X^2 - 4X + 3$ nous donne un polynôme Q et deux réels a, b tels que $P = (X^2 - 4X + 3)Q + aX + b$; on a alors $P(A) = aA + bI_3$, de sorte que $\mathbb{R}[A] = \left\{ aA + bI_3 \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(A, I_3)$. Puisque A et I_3 sont non colinéaires, elles constituent une base de $\mathbb{R}[A]$, qui est donc de dimension 2.

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}[A]) = 2.}$$

4. On trouve immédiatement :

$$AB - BA = 0 \qquad \iff \qquad \begin{cases} a = i \\ b = h \\ c = g \\ d = f \end{cases}$$

de sorte que :

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} i & h & g \\ f & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{=i(E_{1,1}+E_{3,3})+hE_{1,2}+\cdots} \;\middle|\; e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$$

et ainsi (est-ce clair ?) :

$$\boxed{\dim\left(\mathcal{C}(A)\right) = 5, \text{ et une base est } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

Ici encore, ne pas passer à la suite sans s'être convaincu du caractère générateur (dans $\mathcal{C}(A)$) ET du caractère libre de cette famille.

5. La résolution de $AX = X$ fournit sans problème $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ avec $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 0)$: $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est libre donc constitue une base de $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$. On trouve de même $\mathrm{Ker}\,(u - 3\mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}\overrightarrow{v_3}$, avec $\overrightarrow{v_3} = (-1, 0, 1)$. En notant les vecteurs « en colonnes » :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(u - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Encore un point qui peut poser problème : si pour résoudre $AX = X$ *vous commencez par* supposer $AX = X$, *c'est déjà (probablement) fichu*[2]*, puisque vous allez seulement montrer, dans le meilleur des cas : « si $AX = X$, alors X est de telle forme », ce qui ne donnera qu'une inclusion du type* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \subset \cdots$
De même, confondre $u(x) = x$ et $AX = X$ est un problème qu'il faudra un jour regarder dans les yeux...

2. Sauf si vous avez fait une synthèse...

6. Il suffit de vérifier que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple en montrant que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3 par un simple pivot. Même le déterminant, très souvent *overkill* serait presque acceptable ici. Par contre les « c'est clairement une base » iront directement à la poubelle.
Maintenant que nous savons que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de la casser en deux morceaux : on sait alors que les sous-espaces engendrés sont des sous-espaces supplémentaires.

$$\boxed{E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont supplémentaires.}}$$

7. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.
   - Supposons $u \circ v = v \circ u$ et fixons x dans E_1. On a $u(x) = x$, donc $u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(x)$, donc $v(x) \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = E_1$, donc E_1 est v-stable. Même chose pour E_2.
   $$\boxed{\text{Si } v \in \mathcal{C}(u) \text{ alors } v(E_1) \subset E_1 \text{ et } v(E_2) \subset E_2.}$$
   - Supposons maintenant E_1 et E_2 v-stables et montrons : $u \circ v = v \circ u$. Pour cela, on fixe $x \in E$ et on essaie de montrer : $u\,(v(x)) = v\,(u(x))$.
   On décompose selon $E_1 \oplus E_2$: $x = x_1 + x_2$. On a alors $x_1' = v(x_1) \in E_1$ et $x_2' = v(x_2) \in E_2$, donc $u(x_1') = x_1'$ et $u(x_2') = 3x_2'$, et ainsi $u\big(v(x)\big) = u(x_1' + x_2') = x_1' + 3x_2'$ alors que :
   $$v\big(u(x)\big) = v(x_1 + 3x_2) = v(x_1) + 3v(x_2) = x_1' + 3x_2'.$$
   $$\boxed{\text{Si } v(E_1) \subset E_1 \text{ et } v(E_2) \subset E_2 \text{ alors } v \in \mathcal{C}(u).}$$

   On pouvait aussi travailler matriciellement, ou bien montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur les deux sous-espaces supplémentaires auxquels on pense.

8. Déjà, la question précédente nous assure que si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors v induit bien deux endomorphismes sur respectivement E_1 et E_2, ce qui justifie l'espace d'arrivée de Φ.
Ensuite, La linéarité de Φ est claire [3].
Supposons maintenant $v \in \operatorname{Ker}\Phi$: v a alors ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires nulles, donc est nulle (c'est le même principe que lorsqu'une application linéaire est nulle sur une base...). Ainsi, $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$, donc Φ est injective.
Pour la surjectivité, fixons $(v_1, v_2) \in \mathcal{L}(E_1) \times \mathcal{L}(E_2)$. Il existe alors un (unique) endomorphisme v de E tel que $v|_{E_1} = v_1$ et $v|_{E_2} = v_2$. Mais alors, E_1 et E_2 sont v-stables, donc $v \in \mathcal{C}(u)$, et il n'y a plus qu'à constater que $\Phi(v) = (v_1, v_2)$.

$$\boxed{\Phi \text{ est bien un isomorphisme de } \mathcal{C}(u) \text{ sur } \mathcal{L}(E_1) \times \mathcal{L}(E_2).}$$

9. Les espaces $\mathcal{L}(E_1)$ et $\mathcal{L}(E_2)$ sont respectivement de dimensions 4 et 1, donc $\mathcal{L}(E_1) \times \mathcal{L}(E_2)$ est de dimension $4 + 1 = 5$. Il en va donc de même pour $\mathcal{C}(u)$ d'après l'isomorphisme précédent.

Pour conclure, l'application $\Psi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à w associe sa matrice dans la base canonique est un isomorphisme, donc préserve la dimension (si W est un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de dimension k, alors $\Psi(W)$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension k), or $\Psi\big(\mathcal{C}(u)\big) = \mathcal{C}(A)$, donc on retrouve bien :

$$\boxed{\dim\left(\mathcal{C}(A)\right) = 5.}$$

Ceux qui pensent qu'un endomorphisme et une matrice c'est la même chose... doivent absolument faire l'effort de les distinguer, sans quoi ils resteront dans le pipotage perpétuel. Peut-être à la fin de l'année nous autoriserons-nous ce genre d'analogie endomorphisme/matrice, mais il est trop tôt !

3. Et si elle ne l'est pas, ce n'est pas en regardant ailleurs en sifflotant que vous saurez faire un jour : au boulot !