Réduction des endomorphismes*... et des matrices*

1 Petit rang... gros noyau

Exercice 1 – *2022 [4/10]*
Montrer en faisant le moins de calculs possible que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Exercice 2 – *CCP 2018 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non nulle. On définit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (\text{tr}(A))M - (\text{tr}(M))A$.

1. Justifier brièvement que f est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $f \circ f(M)$, et en déduire d'une seconde façon que f est diagonalisable.

Exercice 3 – *TPE 2017*
[4/10] Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles. On pose $M = I_n + CL$.

1. Établir : $M^2 = (2 + LC)M - (1 + LC)I_n$.
2. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 – *CCP 2017 [5/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$). telle que $\text{tr}(A) = \text{rg}(A) = 1$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

Exercice 5 – *TPE 2017 [2/10]*

Soit $n \geqslant 2$. On définit $A = \begin{pmatrix} 4 & & & (1) \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. $A - 3I_n$ est-elle inversible ?
3. Donner les éléments propres de A.

Exercice 6 – *CCP 2016 [5/10]*
Soient E de dimension $n \geqslant 2$, φ une forme linéaire non nulle sur E, et $x_0 \in E$ non nul. On définit l'application

$$u : x \in E \longmapsto x + \varphi(x)x_0$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que 1 est valeur propre de u, et déterminer le sous-espace propre associé ainsi que sa dimension.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

2 Exemples numériques

Exercice 7 – *CCINP 2023 [4/10] - Zacharie S.*

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, on note $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Calculer le déterminant de M.
   On suppose dans cette question que ce déterminant est non nul.
   Déterminer le noyau et l'image de M.
   M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose : $a = b$ et $c \neq 0$. Déterminer les sous-espaces propres.
4. Diagonaliser effectivement M dans le cas général.

Exercice 8 – *CCINP 2022 [4/10] - Apolline N.*

On définit les suites u, v, w par leurs premiers termes : $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ ainsi que les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \quad 1u_n + 2v_n - 1w_n \\ v_{n+1} &= -1u_n + 4v_n - 1w_n \\ w_{n+1} &= -1u_n + 2v_n + 1w_n \end{cases}$$

valables pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. En notant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Quels sont les sous-espaces propres de A ?
4. Trigonaliser A.
5. Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 9 – *CCP 2017 [5/10]*

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le spectre de A.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Expliciter une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ telle que u et v soient des vecteurs propres de A.
4. A est-elle trigonalisable ?

Exercice 10 – *Mines-Télécom 2016 [3/10]*

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle inversible ? Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
2. Montrer que $A^4 = 0$; en déduire la valeur du spectre de A.
3. Soit $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_4)$, avec $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = u(f_1)$, $f_3 = u(f_2)$ et $f_4 = u(f_3)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et donner la matrice de u dans cette base.

Exercice 11 – *CCP 2016 [3/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Expliquer pourquoi A est diagonalisable.
2. Déterminer une base de vecteurs propres de A (les 5/2 la prendront orthonormée).
3. Diagonaliser A.

Exercice 12 – *ENSEA 2016 [3/10]*
Calculer la puissance n-ième de

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -6 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 7/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 – *CCP 2015, 2016 (deux fois) ; mais posé à l'oral en 2014 aussi... [3/10]*
On définit f par :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments propres de f.
3. f est-elle diagonalisable ? inversible ?

Il y a aussi la version :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 14 – *CCP 2009*

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit λ une valeur propre de f de multiplicité m. Montrer que $1 \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) \leqslant m$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 15 – *CCP 2010*
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifie $B^2 = A$, montrer que A et B commutent.
3. Déterminer $Rac(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C});\ B^2 = A\}$.

3 Mais aussi...

Exercice 16 – *CCINP 2022 [6/10] - Saskia V.*
Soit u un endomorphisme non nul de $E = \mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = -u$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$.
2. En déduire que $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u.
   En déduire que $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)$ ne sont pas réduits à $\{0\}$.
4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 17 – *CCINP 2022 [5/10] - Anna B.*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont des racines de P.
2. Montrer que $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.
4. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 18 – *Mines 2016 [7/10]*
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$, avec $\mathrm{tr}(M) = n$.

Exercice 19 – *CCP 2016 [2/10]*
La matrice $\begin{pmatrix} 2+i & i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 20 – *Encore un classique : théorème de Gerschgorin*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_f\left(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|\right)$$

(il s'agit de disques fermés).

Exercice 21 – *Mines 2010 – MP*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, M^2$.

Exercice 22 – *Mines 2012*
Déterminer le spectre de $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 23 – *Mines 2012*
Soit $n \geqslant 2$. Résoudre $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 24 – *CCP 2018 [6/10]*
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ? inversible ? Donner ses éléments propres.
2. Donner les éléments propres de $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ Est-elle diagonalisable ?

Exercice 25 – *Centrale 2018 [7/10]*
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul. On note E_X l'ensemble des matrices ayant X comme vecteur propre.

1. Montrer que E_X est un espace vectoriel.
2. Donner la dimension de E_X.
3. Expliciter E_X lorsque $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 26 – *Centrale 2018 [1/10]*
Donner une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

Exercice 27 – *Mines 2018 [8/10]*
Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & (0) & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que A soit diagonalisable.

Exercice 28 – *Mines 2018 [7/10]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices réelles (n, n) à coefficients dans $[0, 1]$ dont la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1.

1. Expliciter une valeur propre et un vecteur propres commun(ne)s à toutes les matrices de $\mathcal{S}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication.
3. Soit $A \in \mathcal{S}$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module $\leqslant 1$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A - I_n) = \mathrm{Ker}\,((A - I_n)^2)$.

4 Des indications

Exercice 1 – A est clairement (huhu !) de rang 1 puisque les colonnes sont toutes colinéaires avec la première ! En cognant A contre cette première colonne, on voit même que l'image est incluse dans le noyau. On fait alors notre dessin préféré, on construit une base adaptée au problème, et c'est fini.

Exercice 2 – Proche de l'exercices précédent, le noyau de $\psi - (\mathrm{tr}(A))\mathrm{Id}$ étant cette fois assez gros. Je trouve $f^2 = (\mathrm{tr}(A))f$, ce qui fournit $X(X - \mathrm{tr}(A))$ comme polynôme annulateur scindé à racines simples. Accessoirement, je trouve la question 2 plus naturelle après avoir réfléchi à la diagonalisation, qui fait apparaître naturellement les sous-espaces supplémentaires $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr})$.

Exercice 3 – Hum... $M - I$ ne serait-elle pas de rang 1 ? Il s'agit alors de savoir si sa trace $CL = \sum c_i \ell_i$ est nulle ou pas... Mais on peut aussi respecter l'esprit de l'énoncé et privilégier le point de vue « polynôme annulateur » !

Exercice 4 – Dès qu'on voit $A^2 = (\mathrm{tr}(A))A = A$, l'affaire est pliée ! Si l'examinateur grogne, on reprend la preuve, en partant par exemple d'une base du noyau et en complétant ; etc.

Exercice 5 – Hum, comment dire... A ne serait-elle pas proche d'une matrice de rang 1 ?

Exercice 6 – $u - \mathrm{Id}_E$ est de rang 1... Et si on travaillait dans une base adaptée au problème ? Genre commençant avec une base du noyau de φ ? Le fait que x_0 appartienne ou non à ce noyau devra à un moment ou un autre être discuté.

Exercice 7 – Le polynôme caractéristique est $(X-b)(X-a-c)(X-a+c)$, et il n'est pas difficile d'expliciter trois vecteurs propres assez simples et constituant une base de $\mathbb{R}^3$, indépendemment du fait que les valeurs propres soient distinctes ou non. Ce qui trivialise le reste de l'exercice !

Exercice 8 – Il y a une seule valeur propre (triple) qui est 2. Le sous-espace propre associé est de deimension 2 et possède pour base $((-1,0,1),(2,1,0))$.
Personellement je n'aurais pas trigonalisé : j'aurais fait la diviion euclidienne de X^n par le polynôme annulateur $(X-2)^2$...

Exercice 9 – Je trouve $\chi_A = (X-2)^2(X+1)$, ce qui est cohérent avec la trace (oui, n'est-ce pas, vous aviez comme toujours vérifié...).

Exercice 10 – Les deux premières lignes sont égales... ensuite, il s'agit d'une étude plutôt guidée d'un nilpotent !

Exercice 11 – On (les 5/2 !) peut voir une matrice symétrique réelle ; ou reconnaître en A la cousine de $A + 2I_3$... dont la réduction a peut-être déjà été évoquée une ou deux fois...

Exercice 12 – $\chi_A = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X = X(X-1/2)(X-1)$... et merci de ne pas diagonaliser mais plutôt de diviser euclidiennement X^n par ce polynôme, annulateur d'après Cayley-Hamilton.

Exercice 13 – Je travaillerais bien dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ (oui, dans cet ordre)...

Exercice 14 – Petit rang, gros noyau...

Exercice 15 – $\mathrm{Sp}(A) = \{0,1,2\}$; vecteurs propres : $(1,-2,4)$, $(1,-2,5)$ et $(3,-4,12)$.

Exercice 16 – Une fois la première inclusion établie, le théorème du rang dit que la somme des dimensions des deux noyaux vaut au moins 3 ; il reste alors à montrer que l'intersection est triviale. Ensuite, la dimension assure l'existence d'une valeur propre réelle (un polynôme réel de degré 3 possède forcément une racine). Il reste à montrer que les dimensions sont respectivement de 1 et 2 et non l'inverse. Par l'absurde, un sous-espace stable de dimension 1 est forcément dirigé par un vecteur propre...

Exercice 17 – Le premier point est du cours. Ensuite, décomposer χ_A en produit d'irréductibles, et constater que chacun, évalué en B, donne une matrice inversible. Pour le troisième point, $A^kX = XB^k$, puis $P(A)X = XP(B)$, que j'appliquerais bien à $P = \chi_A$. Enfin, l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $X \mapsto AX - XB$ me semble injectif...

Exercice 18 – Les racines (complexes) du polynôme auquel on pense sont dans un petit ensemble, et on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire quand on écrit que la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités. Tout cela se passe bien entendu dans l'analyse, et on obtient alors nécessairement M inversible, puis $M^3 = I$, puis M diagonalisable sur $\mathbb{C}$, etc.

Exercice 19 – Sans avoir fait le calcul, je suis prêt à parier que cette matrice pourtant symétrique n'est pas diagonalisable... Arf ; après calcul, elle l'est ! J'imagine que l'examinateur attendait seulement l'erreur de raisonnement « symétrique donc diagonalisable », ce qui est assez crétin : autant donner un exemple sur lequel la conclusion est fausse !

Exercice 20 – Penser au « critère » de la diagonale dominante (aka Hadamard).

Exercice 21 – Même esprit que l'exercice précédent. Un sens n'est pas trop compliqué... Pour l'autre, on diagonalise M^2 et on regarde les restrictions de M aux sous-espaces propres de M^2 (comme dans l'exercice 14) : le seul sous-espace qui pourrait poser problème est $\mathrm{Ker}\,(M^2)$, mais en fait...

Exercice 22 – Petit rang...

Exercice 23 – A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$... Attention, il est assez facile de trouver des solutions au problème... mais pour être certain qu'on les a toutes, une géométrisation est indispensable.

Exercice 24 – Même si on ne reconnaît pas une matrice symétrique réelle, les éléments propres de A se calculent sans mal. Ceux de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont également simples, et permettent de construire des éléments propres pour $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ facilement : par exemple si $Af_1 = 3f_1$, alors en posant $X = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$...

Exercice 25 – On complète X en une base de $\mathbb{R}^n/\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, fournissant une matrice de passage P telle que : $M \in E_X$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & N \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Pour l'application numérique on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$...

Exercice 26 – J'imagine que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ doit faire l'affaire...

Exercice 27 – Pour que A soit diagonalisable, il est évidemment suffisant que $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ soit scindé à racines simples... mais c'est également nécessaire. En effet si A était diagonalisable avec $p < n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$, alors $P = (X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)$ serait annulateur de A. Mais si on regarde la première colonne de $P(A)$ (après avoir calculé A^2, A^3...) on voit que c'est impossible. *En termes snobs on dit que χ_A est ici le* polynôme minimal *de A.*

Exercice 28 – Je trouve ça un peu difficile sans indication (la dernière question ; les précédentes ayant été traitées quelques fois dans l'année...). J'ai choisi X dans le noyau de $(A-I)^2$: $(A^nX)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais en écrivant $A = I + (A-I)$ et en Newtonisant on obtient $A^nX = X + n(A-I)X$...