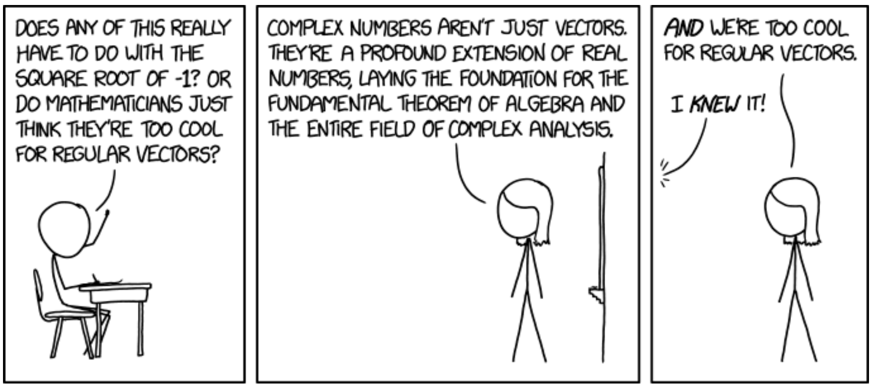
Mathématiques en deuxième année : les règles du jeu

«I have a very strict gun control policy : if there's a gun around, I want to be in control of it. » – Clint Eastwood

Table des matières



Les premiers exercices de l'année sont moins niais qu'il ne semble : ils ne constituent pas (uniquement) une provocation ! D'ailleurs moins de la moitié de la classe est probablement capable de les traiter correctement (et ce n'est pas un problème)...

Exercice 1. *Résoudre l'équation* $2x = 4$.

Exercice 2. *Résoudre l'équation* $2x = 2x + 4$.

Exercice 3. *Résoudre l'équation* $2x + 4 = 2(x + 2)$.

Exercice 4. *Soient* $a, b \in \mathbb{C}$. *Résoudre l'équation* $ax = b$.

Exercice 5. *Résoudre l'équation* $x + y = 1$.

1 Raisonner, rédiger

Exercice 6. *Montrer que la composée de deux applications injectives est elle-même injective.*

Rédiger des mathématiques nécessite du soin. Une rédaction calamiteuse cache parfois un esprit confus... mais révèle le plus souvent une réelle incompréhension des idées sous-jacentes, cachée dans du charabia. Voici une liste résumant les points principaux auxquels je suis attaché ; vous pourrez vérifier que je les applique systématiquement dans mon cours et mes corrigés [1]. Pour chacun de ces points, dites-vous que si vous ne comprenez pas ce que je raconte, alors vous avez certainement un gros problème... qu'il convient de résoudre rapidement en me demandant des précisions.
C'est parti :

1. Écrire des phrases est indispensable pour faire des maths. Autre condition nécessaire : qu'elles soient grammaticalement correctes...
2. Quand on veut montrer de façon directe que A implique B, on suppose A [2], et on se concentre sur ce qu'on veut montrer, à savoir B, plutôt que de répéter de 15 façons différentes ce que signifie ou ce qu'on peut déduire de A : c'est sur la signification précise de B qu'il faut se concentrer.

   « Supposons A. On veut montrer B, c'est-à-dire : ... ».
3. Bannir dans une large mesure le symbole $\Longrightarrow$ (sauf dans les énoncés ou définitions) ; même si certains pensent que ce symbole est un raccourci astucieux pour « et donc » ou encore « ce qui implique » (ce qui est grossièrement faux). Pour ce qui est du symbole $\Longleftrightarrow$, je ne l'autorise (et en l'occurrence l'exige !) que dans les résolutions de systèmes linéaires. Il est d'ailleurs très formateur que vous compreniez quelle implication donne l'existence et laquelle donne l'unicité (il en a été question dans les premiers exos et il en sera encore question dans la suite de ce poly et de l'année).
4. Bannir l'expression « du coup » au delà d'une ou deux occurences par séance de deux heures. Je suggère « subséquemment » pour remplacer (et constater le caractère souvent absurde). Par exemple en colle, on dit « Bonjour » plutôt que « Du coup, ... » en arrivant devant le colleur. Quelques instants plus tard, on ne commence pas une résolution d'exercice par « Du coup » mais plutôt par « Je n'ai rien de solide, mais je vais essayer telle chose pour telle raison ».
5. Idem pour le symbole $\forall$, à proscrire en dehors des définitions. Pour montrer quelque chose pour tout x dans E, on COMMENCE par fixer x dans E, sinon, c'est direct la poubelle. Une fois qu'on a prouvé la propriété pour cet x, on peut conclure : « Ainsi, pour tout $x \in E$, blabla ». On dit alors qu'on a *libéré* x, qui n'est plus fixé dans la suite.

   On notera qu'AVANT d'*énoncer/rappeler* [3] le fait que « pour tout $x \in E$, blabla », il ne faut surtout pas que x soit fixé (sans quoi, que désigne le x du « pour tout x » ?). Et APRÈS avoir dit « Pour tout $x \in E$, blabla... », il n'y a toujours pas de x fixé. Si vous n'avez pas compris cela, ce n'est pas catastrophique, mais vous devez acter le fait que vous n'avez pas compris le sens de cette quantification. Une partie du travail de début d'année consistera à comprendre cela.

   Une bonne façon de ne pas se prendre les pieds dans le tapis consiste, lorsqu'on veut fixer un objet pour un certain temps, à l'appeler x_0, pour ne pas le confondre avec un x générique qui arriverait dans un « pour tout $x \in E$, ... ».

1. Et vous pouvez/devez faire un scandale si/quand ce n'est pas le cas.
2. Et ce ne doit JAMAIS être implicite : on écrit « Supposons ... »
3. Et non *prouver*.

6. Très petite tolérance pour le symbole $\exists$, mais écrire « il existe » reste préférable. La formulation « il existe x_0 tel que... » (surtout avec x_0 plutôt que x) contiendra *en général* implicitement le fait que pour la suite, on a fixé un tel x_0 (on notera la grande différence avec le quantificateur $\forall$) ; en cas de doute, on peut appuyer avec un « et on fixe un tel x_0 dans la suite ».
7. J'impose un cadre strict pour les récurrences, avec en particulier une définition précise de la proposition à montrer : on commence par définir explicitement, ET AVEC DES GUILLEMETS la proposition $\mathcal{P}(n)$ qu'on prétend montrer ; et aussitôt après, on regarde si ce qu'on a écrit a du sens pour $\mathcal{P}(10)$. Par exemple, si on a défini $\mathcal{P}(n)$: « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ... », regarder la valeur de $\mathcal{P}(10)$ va vous faire froncer les sourcils. Si vous ne le faites pas, normalement il y a au moins une page de votre copie qui sera mise dans un très sale état. Et à la deuxième occurrence, la correction de la copie s'arrête.

   Mais peut-être est-ce du bluff de ma part ? Allez savoir... Qui veut jouer ?
8. J'impose également un cadre strict pour montrer une inclusion : on commence par un mot parmi « Fixons », « Prenons », « Soit », ...
9. D'une manière générale, il convient de toujours FIXER les objets dont on veut parler ou au sujet desquels on veut montrer quelque chose.
10. Cadre strict pour montrer la liberté d'une famille : on suppose DÈS LA PREMIÈRE PHRASE que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ (plus précisément, que les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que...), et on tâche de montrer que les λ_i sont nuls. Faire autrement revient souvent à montrer que $0 = 0$, ce qui n'est pas inexact, mais ne permet pas vraiment de prouver que la famille est libre... Et NON, on ne montre pas la liberté d'une famille en montrant une équivalence. *Pas chez moi en tout cas !*
11. D'une manière générale, je suis assez partisan [4], pour montrer « A implique un truc compliqué » d'une rédaction de la forme :
    Supposons A. On veut montrer le truc compliqué C'EST-À-DIRE : blabla.
    Fixons pour cela ... : on veut alors montrer ... Or ...
    Ce type de rédaction est quasiment obligatoire au tableau, très vivement conseillé au brouillon/en TD, et laissé à votre convenance pour les DS (mais plutôt conseillé).
12. Les dépendances relatives des objets sont une chose essentielle et assez fine. Il faut en permanence avoir en tête qu'à tel niveau de la preuve, tel objet est fixé ; que tel autre aussi, et qu'il dépend du premier, et que par contre ε n'existe pas puisqu'il n'a jamais été fixé. La distinction entre f et $f(x)$ est sur ce point essentielle (même s'il y a des cadres où on peut s'autoriser une certaine légèreté ; je pense en particulier aux équations différentielles) : si f est une fonction, alors $f(x)$ dépend (en général !) de x mais certainement pas f. Parler de « la fonction $f(x)$ » posera très régulièrement des problèmes, alors évitez, même si vous devez vous faire violence !
13. Savoir conclure ! Encadrer quelque chose nécessite de faire le bilan sur ce qu'on a effectivement fait dans la question... et on réalise parfois à cet instant qu'on n'a absolument pas fait ce qui était demandé !
14. La rédaction des « analyse-synthèse » fera l'objet d'un paragraphe dans la dernière partie de ce poly.

2 Dessiner, représenter

Le graphique qui suit (« Anscombe's quartet ») représente un jeu de quatre données de 11 couples. C'est typiquement le genre de chose qu'un statisticien... ou un taupin (pour son TIPE) peut avoir à analyser :

4. Le mot est faible.

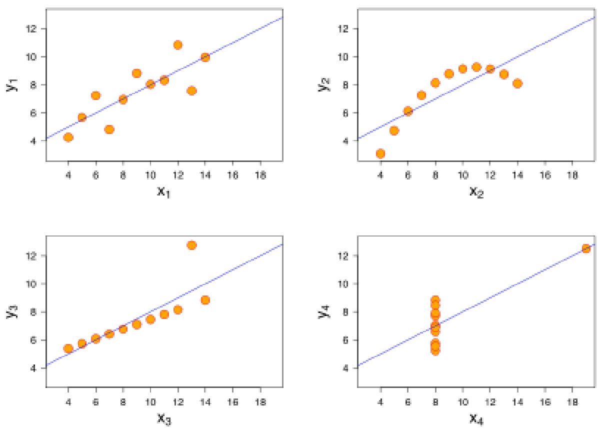


FIGURE 1 – Ces données se ressemblent ?

Si – au lieu de cette représentation graphique – on se donne les couples (x, y) et qu'on réalise aveuglément les statistiques standard (moyenne, variance, corrélation, régression linéaire...), on va trouver quasiment les mêmes résultats, et une étude statistique aveugle va donc conduire à la conclusion suivante : *ces quatre jeux de données sont essentiellement les mêmes* ; ce qui dénote bien entendu un tragique problème méthodologique :

Il faut (quand c'est possible) représenter/observer les objets avant de calculer et/ou de disserter dessus.

Voici un catalogue (non exhaustif) de situations où représenter d'une certaine façon des objets permettra de mieux les appréhender :

— En trigonométrie, le cercle trigonométrique permet de retrouver des tas de formules dont on connaît vaguement l'existence. Par exemple, que vaut $\sin(x - \pi/2)$?

— Quand il est question de composer deux applications, représenter les ensembles de départ et d'arrivée par des patatoïdes vous permettra de (moins) vous prendre les pieds dans le tapis. Par exemple, s'il est question de $f \circ g$, avec f et g agissant entre des espaces E, F et G, parler de $\mathrm{Im}\,(g)$, $\mathrm{Ker}\,(f)$ ou encore $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$ sans faire les patatoïdes va probablement vous conduire à quelques erreurs... Personnellement, je suis incapable de composer les applications sans visualiser les patatoïdes. Spoiler : vous non plus.

— Pour ne plus faire l'erreur consistant à croire, lorsque $E = E_1 \oplus E_2$, que tout élément de E est soit dans E_1 soit dans E_2, il est utile d'avoir en tête un dessin de ce type :

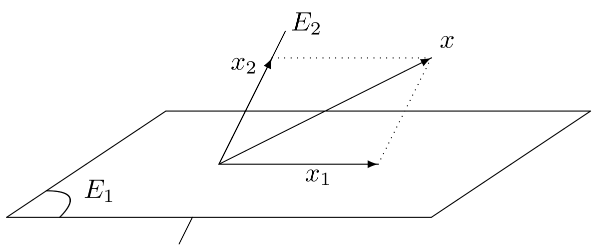


FIGURE 2 – $x \in E_1 + E_2 \neq E_1 \cup E_2 \not\ni x$

un vecteur générique n'est a priori ni dans E_1 ni dans E_2...
Dans des contextes euclidiens, la version orthogonale pourra être utile, mais s'il n'est pas question de produit scalaire, il est préférable de visualiser les choses « de façon penchée » pour ne pas imaginer des relations/propriétés qui n'ont pas lieu d'être.

— Si on manipule le complexe $z = a + bi = \rho e^{i\theta}$, il est important de comprendre ce que signifient géométriquement a, b, ρ et θ. Que représente $e^{2i\pi/n}$? Et $e^{8i\pi/n}$? Si dans le dessin qui suit vous ne reconnaissez pas un ensemble bien connu...

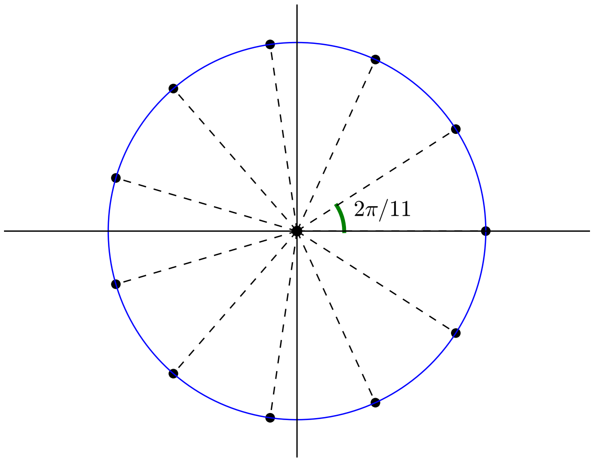


FIGURE 3 – Vous me reconnaissez ?

alors vous n'avez certainement pas compris quelles sont les « racines n-ième de l'unité », et aurez retenu de façon fausse (malgré de gros efforts) le théorème de première année qui les décrit.

— S'il est question de l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

dans un certain contexte, alors il est peu probable qu'on puisse comprendre quoi que ce soit tant qu'on n'aura pas fait l'effort de le représenter, ce qui demande un petit travail préliminaire sur l'inégalité de gauche. Même chose pour

$$\{z \in \mathbb{C};\ |\arg(1 - z)| \leqslant \pi/4\}$$

— Représentez deux vecteurs « qui partent du même point ». Maintenant, représentez leur somme. Puis leur différence.

— Représentez sur un axe deux réels a et b, avec disons $a < b$. Représentez ensuite $\dfrac{a+b}{2}$ puis $\dfrac{b-a}{2}$.

Exercice 7. *Montrer que la composée de deux applications surjectives est surjective.*

3 Calculer

3.1 Dériver, primitiver, intégrer

Exercice 8. *Énoncer puis prouver un théorème qui parle de $(fg)'$.*

Voici quelques points dont il sera question en cours :

— Définition de la dérivabilité.
— Équation d'une droite ; d'une tangente.
— Théorème $\neq$ formule.
— Somme, produit, quotient.
— Point de vue « développement limité ».
— Fonctions usuelles.
— $x \mapsto f(ax + b)$
— Au fait : $\cos x$ n'est pas une fonction.
— Composition : $(f \circ g)'(x)$ vs $(f' \circ g)(x)$ vs $f'(g(x))$ vs $(f(g(x)))'$. Patatoïdes.
— Bijection réciproque. Local puis global. Dérivabilité *et* dérivée.
— Primitiver et intégrer, ce n'est pas pareil... mais il y a quand même un rapport ! (lequel ?)
— Primitiver f, ça consiste essentiellement à remplir les petits points dans : $f = (...)'$. Ce point de vue peut surprendre/sembler niais/crétin, mais je vous assure qu'il peut aider ceux (dont je fais presque partie) qui ont du mal à primitiver correctement alors qu'ils savent dériver.

Certains font les intégrations par parties de tête. C'est inutile, long et difficile, mais parfois, certains arrivent tout de même au bon résultat ainsi. Super : la prochaine étape est de le faire les yeux fermés et avec une main dans le dos. Ceux qui sont moins joueurs (et qui n'ont pas de temps à perdre) pourront poser calmement par écrit les fonctions en jeu.

Exercice 9. *Calculer* $\int_0^\pi t^2 \sin t dt$ *et* $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}\cdot$

Exercice 10. *Donner des primitives de* $t \mapsto -3t^{-1/3}$ *et* $t \mapsto -\cos(-3t)$.

Exercice 11. *Donner une primitive de* $x \mapsto x \sin x$.

Exercice 12. *Donner les primitives de* $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot$

3.2 Développements limités

Exercice 13. *(Calculatrices interdites)*
Tracer sur un même dessin le graphe des fonctions $x \mapsto x, x^2, \sqrt{x}$ *pour* $x \in [0,1]$. *Même chose avec* $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ *et* $1/\ln x$ *pour* $x \in]0,1]$.

Exercice 14. *Reprendre les 6 fonctions précédentes ainsi que la fonction* $\ln$, *mais avec cette fois* $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 15. *Avec les outils/techniques de terminale, déterminer* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n}$.

Exercice 16. *Reprendre l'exercice précédent, en utilisant plutôt le développement limité* $\ln(1+u) = u + o(u)$, *ou l'équivalent* $\ln(1+u) \sim u$ *(mais sans les confondre !).*

Exercice 17. *Commenter l'affirmation suivante :*

$$\ln(1+u) \sim u + \frac{u^2}{3}\cdot$$

Exercice 18. *Déterminer la limite de* $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ *lorsque* x *tend vers* 0.

Il faudra bien finir par retenir les développements limités de base :

- $\frac{1}{1-t} \underset{0}{=} 1 + t + t^2 + \cdots + t^p + o(t^p)$.
- $(1+t)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \binom{\alpha}{p} t^p + o(t^p)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{e}^t \underset{0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^p}{p!} + o(t^p)$.
- $\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{p} t^p + o(t^p)$.
- $\sin t \underset{0}{=} t - \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} + o(t^{2p+1})$.
- $\cos t \underset{0}{=} 1 - \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!} t^{2p} + o(t^{2p})$.
- $\tan t \underset{0}{=} t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)$.

Ensuite, il faut être capable de les sommer, multiplier, composer...

- Dans les sommes, c'est toujours le moins bon ordre qui l'emporte.
- On ne fait que des produits $(1 + \cdots + o(x^p))\,(1 + \cdots + o(x^p))$. *Sans cela, c'est parfois (rarement) correct, mais comme je ne comprends pas, je raye tout...*
- On ne fait jamais de quotients... mais des produits avec $\frac{1}{1+\cdots}$ ou encore (mieux) : $\frac{1}{1-\cdots}\cdot$

— On écrit les développements limités intermédiaires précis utilisés (typiquement, pour les $\frac{1}{1+\cdots}$).
Sans cela, c'est parfois (rarement) correct, mais comme je ne comprends pas, je raye tout...
— Primitivisation des développements limités : vous avez un énoncé[5] à me proposer ?

Exercice 19. *Déterminer un développement limité à l'ordre* 3 *en* 0 *de* $\dfrac{1}{1+v-v^2-2v^3}\cdot$

Exercice 20. *Déterminer un développement limité à l'ordre* 4 *en* 0 *de* $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot$

Exercice 21. *Reprendre l'exercice précédent, en notant que* $\tan' = 1 + \tan^2$.

Pour les calculs de développements limités, limites et équivalents, je suis assez *(très !)* défavorable aux calculs à des ordres élevés a priori : privilégiez toujours une première étude à la louche des limites des différents termes ; en cas de forme indéterminée (et seulement dans ce cas), on travaille à l'ordre 1 (ou éventuellement plus selon contexte).

Exercice 22. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *pour que la série de terme général* $u_n = a\sqrt{n+2} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n}$ *converge.*

On commencera par donner la limite de u_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Le dernier exercice constitue (quasiment) la preuve d'un résultat d'approximation qui sera vu dans quelques mois en probabilités : une loi binomiale peut être approchée par une loi de Poisson.

Exercice 23. *Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *Déterminer la limite lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *de*

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

3.3 Calcul algébrique divers

Point important, peut-être nouveau pour certains : écrire les sommes « avec des petits points » n'est pas tabou. Bien souvent ça permet de bien comprendre la nature de la somme, la valeur réelle des deux premiers termes et du dernier.
Au sujet des suites géométriques, il convient de :
— connaître la valeur de $1 + q + q^2 + \cdots + q^N$;
— y compris quand $q = 1$...
— savoir se débrouiller avec ça et seulement ça.

Exercice 24. *Que vaut* $q^4 + q^5 + \cdots + q^{n-2}$ *?*

Exercice 25. *Reprendre l'exercice précédent, mais sans se tromper.*

Exercice 26. *Donner sous forme factorisée la valeur de* $\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos(n+1)t$.

Exercice 27. *Reprendre l'exercice précédent, mais sans se tromper.*

Exercice 28. *Calculer* $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-2k+1}$.

Le binôme de Newton : si vous ne savez pas écrire en moins de 20 secondes la forme développée de $(a-b)^5$, alors vous n'avez pas compris de quoi on parle (même si vous êtes éventuellement capables de régurgiter une formule).

Exercice 29. *Rappeler la formule (le théorème ?) du binôme de Newton.*

Exercice 30. *Donner le principe (et éventuellement un peu plus) de la preuve.*

Exercice 31. *Pour* $x \neq 0$, *développer puis simplifier l'expression :* $\dfrac{(x+1)^5 - x^5 - 1}{5x}\cdot$

Exercice 32. *Résoudre* $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = 0$.

Plus rarement (mais c'est tout de même vaguement au programme) : on peut avoir besoin parfois de factoriser $a^n - b^n$. Par exemple : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$...

5. Vous savez, les machins de boomers, avec des hypothèses et une conclusion...

4 Mais encore

4.1 Ensembles

Il convient déjà de distinguer les symboles $\in$ et $\subset$: « 2 appartient à $\mathbb{R}$ » mais « $[0,1]$ est inclus dans $\mathbb{R}$ ». Écrire $2 \subset \mathbb{R}$ ou $[0,1] \in \mathbb{R}$ est en général le prélude à des énormités. Les « Ouais c'est bon, on s'était compris » ne marcheront pas avec moi. Mauvaise foi ? Si vous voulez.
Il est ensuite important de savoir *décrire* des ensembles ; le point crucial étant de faire la distinction entre les deux formes de description (aussi utiles l'une que l'autre) :

— « l'ensemble des éléments de tel ensemble qui vérifient telle propriété »

$$\{z \in \mathbb{C};\ z^6 = 1\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 2x+3y=0\}$$

(lire « l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ TELS QUE $z^6 = 1$ », « l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ TELS QUE $2x+3y=0$ ») ;

— « l'ensemble de tels objets (dépendant de tel paramètre), avec tel paramètre décrivant tel ensemble »

$$\{e^{2ik\pi/10},\ k \in [\![0,9]\!]\} \qquad \{(3t,-2t),\ t \in \mathbb{R}\}$$

(lire « l'ensemble des complexes $e^{2ik\pi/10}$, AVEC k DÉCRIVANT $[\![0,9]\!]$ », « l'ensemble des couples $(3t,-2t)$, AVEC t DÉCRIVANT $\mathbb{R}$ »).

On aura noté l'importante différence entre le « TELS QUE » et le « AVEC ... DÉCRIVANT... ». Une des difficultés réside dans la notation : parfois, on utilise le signe | indifféremment pour « tel que » et pour « avec » ! Si vous lisez de la même façon ces descriptions d'ensembles intrinsèquement très différentes, il y a un GROS travail de compréhension à effectuer le plus tôt possible (maintenant, par exemple).
Confondre les deux points de vue revient grosso modo à confondre image et noyau en algèbre linéaire. Ou encore, dans la vraie vie : droite et gauche, haut et bas, avant et après ; etc.
Si vous n'êtes pas au point sur ces questions, il faudra commencer par être extrêmement rigoureux dans les notations : lisez correctement mes maths, et écrivez correctement les vôtres !

4.2 En algèbre linéaire

Bon, juste trois points pour commencer :

— Il faut ABSOLUMENT que vous compreniez que quand une matrice A représente un endomorphisme u entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, les colonnes de A représentent les coordonnées des $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}$. Ceux (bien trop nombreux ; majoritaires en fait) n'ayant pas encore compris ça DOIVENT commencer par ça !

— Une matrice n'est PAS une application linéaire. Par contre :

  — si on dispose d'une application linéaire et de bases des espaces de départ et d'arrivée, alors on associe à cette application linéaire et ces bases une matrice ;

  — si on dispose d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on peut lui associer une application linéaire très spéciale (dite canonique) entre deux espaces très spéciaux ($\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$) munis de deux bases très spéciales (les canoniques). *Parler de la base canonique d'un espace quelconque n'a aucun sens.*

— Travailler dans une base adaptée à un problème donné est quasiment l'alpha et l'oméga du cours d'algèbre linéaire. Savoir prouver Grassmann en construisant une base adaptée à tous les sous-espaces en jeu est de ce point de vue très formateur à mon avis : pour montrer que $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$, choisissez une base de l'intersection ; complétez la de deux façons différentes, concaténez le tout, prouvez qu'on obtient une base de la somme, et concluez !

4.3 Analyse-synthèse

On raisonne par « analyse-synthèse » dans des situations où on cherche une/la/des/les solutions à un problème pour lequel on ne peut pas travailler par équivalences.
Commençons donc par voir ce qui se passe quand on PEUT travailler par équivalences ! On imagine qu'on cherche l'ensemble $\mathcal{P}$ des x répondant à un problème et qu'on peut écrire :

$$x \in \mathcal{P} \iff \cdots \iff \cdots \iff x = 42$$

Le sens « $x \in \mathcal{P} \Rightarrow x = 42$ » ne dit pas que 42 est solution au problème, mais que SI x répond au problème, ALORS $x = 42$: il y a unicité d'une *éventuelle* solution ; le sens « $x = 42 \Rightarrow x \in \mathcal{P}$ » nous assure que 42 est effectivement solution.
On pourrait tout à fait imaginer des situations dans lesquelles on prouve :

$$x \in \mathcal{P} \Rightarrow x \in \{10, 42, 1515\};$$

on constate ensuite que 10 et 42 répondent au problème, mais pas 1515 on peut conclure que LES solutions sont 10 et 42.
On peut aussi imaginer avoir prouvé « $x \in \mathcal{P} \Rightarrow x = 42$ », puis constater que 42 n'est PAS solution au problème ; on peut alors conclure : $\mathcal{P} = \emptyset$ (il n'y a pas de solution au problème).

Concrètement, la première chose à se demander est : qu'est-ce que l'on cherche à faire ? prouver l'existence d'une solution ? déterminer les solutions ? déterminer une solution ? Ce n'est pas la même chose ! Dans une situation telle que « Prouver que notre problème possède une unique solution », une rédaction typique est :

Analyse :
Supposons que x soit une solution au problème. On a alors .... donc $x = 42$.
Synthèse :
Prenons $x = 42$. .... donc x répond au problème.
Conclusion :
Notre problème possède une unique solution, qui est 42.

Il faut bien comprendre que l'analyse ne prouve PAS que 42 est solution : le croire consiste à confondre nécessaire et suffisant ; existence et unicité, haut et bas, gauche et droite, etc. Par ailleurs, une fois sorti de l'analyse, x n'est PAS fixé, donc pour la synthèse, il convient de définir effectivement x comme étant égal à 42.

Exercice 33. *Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Ici, l'objet recherché est un couple de fonctions (f_1, f_2), avec f_1 paire, f_2 impaire et tel que $f = f_1 + f_2$. À la fin de l'analyse, on a prouvé que SI un tel couple existe, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_1(t) = ...$ et $f_2(t) = ...$ Dans la synthèse, il faut alors EFFECTIVEMENT définir deux fonctions f_1 et f_2 avec les formules précédentes et vérifier qu'elles sont EFFECTIVEMENT solutions au problème initial (ce qui n'a rien d'évident a priori, et n'a rien de compliqué à montrer a posteriori).

Exercice 34. *Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :*

$$x = \sqrt{x+2}$$

Ici, l'analyse va probablement (mais pas forcément) conduire à confiner x dans un ensemble à deux éléments... et dans la synthèse, que va-t-il se passer ?

4.4 En analyse

Je déconseille assez vivement (surtout pour ceux qui n'utilisent qu'elle, désolé !) la notation « lim », parfois utile mais qui devrait n'être utilisée qu'à dose homéopathique. Un des objectifs de l'analyse de taupe est que vous compreniez que les limites, ça n'existe pas toujours. Et le répéter ne suffit pas : en utilisant à tour de bras la notation lim, vous êtes convaincus que quand on a deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) + \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$: ceci est *vraiment* FAUX (oui : même si $(u_n + v_n)$ possède une limite).

Pour tout dire, je ne suis même pas certain de la signification (chez ceux qui l'utilisent) de la notation « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ » : s'agit-il de « la limite de (u_n) vaut ℓ » ou bien « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite qui vaut ℓ » ? Ce sont deux affirmations très différentes !

La formulation « u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ » ne comporte aucune ambiguïté, et je préfère donc TRÈS nettement la notation associée à cette phrase : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

À ce sujet, il faudra bien comprendre la différence entre le théorème d'encadrement (« des gendarmes ») qui raconte que sous telles hypothèses, on peut conclure quant à l'*existence* d'une limite (et accessoirement sa valeur)... et le théorème de passage des inégalités à la limite, qui dit que sous certaines hypothèses (dont l'existence des limites), on peut conclure en obtenant une *information* sur ces limites.

Enfin, je le répète : f et $f(x)$, ce n'est pas pareil ! Quand on va attaquer les suites et séries de fonctions en confondant f et $f(x)$, on va rapidement confondre f (qui n'existe pas), « f de n de x » (sic), f_n, $f_n(x)$... La question de la convergence uniforme deviendra alors très légèrement absconse.

4.5 Petits points

J'autorise (et même, pour tout dire, encourage vivement) en début (et plus) de spé l'utilisation de petits points plutôt que des $\sum$. Ne pensez pas qu'on est beaucoup moins rigoureux en écrivant des sommes correctement avec des petits points... qu'incorrectement avec des $\sum$! Le passage au $\sum$ est évidemment indispensable, mais se fera progressivement.

Dans la même idée il conviendrait de savoir transformer $10 \times 9 \times \cdots \times 4$ en quotient de factorielles.

4.6 Trigonométrie from scratch

Le point central est le fait que $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. On en tire déjà :

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i}\cdot$$

Ensuite, $(\mathrm{e}^{i\varphi})^n = \mathrm{e}^{ni\varphi}$, ce qui permet d'exprimer $\cos(n\varphi)$ ou $\sin(n\varphi)$ comme des polynômes en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.

Pour dérouler « le » formulaire trigo à partir des formules (à connaître !)

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b,$$

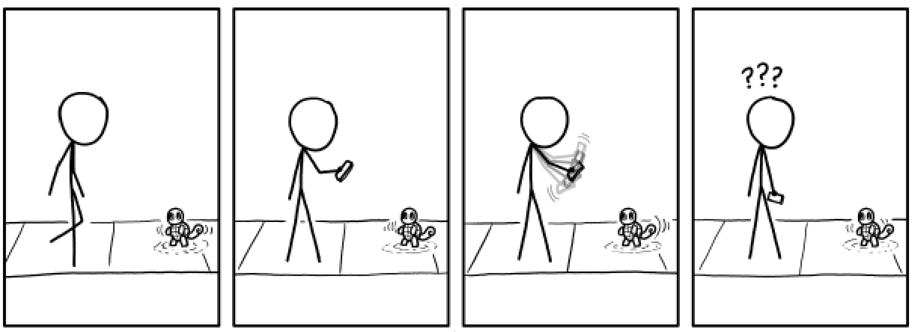
exprimer :

— $\cos 2x$ et $\sin 2x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, puis $\cos 2x$ en fonction du seul cos, puis en fonction du seul sin ;
— $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$;
— $\cos(x-y)$ et $\sin(x-y)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$;
— $\cos u + \cos v$ et $\sin u + \sin v$ à l'aide de produits de cosinus et sinus.

Exercice 35. *Exprimer* $\cos(5x)$ *en fonction de* $\cos x$.

Exercice 36. *Résoudre dans* $]-\pi/4, \pi/4[$ *l'équation :*

$$\tan(2\theta) = 3\tan\theta.$$



MY HOBBY: BUILDING PLASTIC POKÉMON WITH SUBTLE UNDERLIGHTING AND A GYROSCOPE TO MAKE THEM DRIFT BACK AND FORTH, THEN LEAVING THEM SITTING AROUND TO MESS WITH POKÉMON GO PLAYERS.