Suites et séries de fonctions

1 Modes de convergence

Exercice 1 – *Mines 2022 [6/10] - Melvil D.*
Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0,1[$ telle que $(t_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. On définit par ailleurs, pour $n\in\mathbb{N}$: $P_n = X^n - X^{n+1}$.

1. Donner un exemple de suite (t_n) telle que (t_n^n) ne converge pas vers 0.
2. Montrer que (la suite de fonctions polynomiales associées à) (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
3. Montrer que $P_n(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. En partant de la relation
$$x^n - x^{n+1} = x^n \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{x^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k},$$
montrer d'une deuxième façon que $P_n(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 2 – *TPE 2017 [5/10]*
On définit, pour $n\in\mathbb{N}$, l'application
$$f_n : t \longmapsto n\cos t \sin^n t.$$
Étudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,\pi/2]$.

Exercice 3 – *TPE 2017 [4/10]*

1. Montrer que si $\sum f_n$ converge, alors (f_n) est bornée à partir d'un certain rang, et converge uniformément vers 0.
2. Montrer que $\sum (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément.

Exercice 4 – *TPE 2017 (deux fois) [3/10]*
On définit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. A-t-on convergence uniforme ?
3. Prouver la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, lorsque $a>0$.

Exercice 5 – *$x^n \ln x$ [3/10]*
Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec :
$$f_n : x\in[0,1] \longmapsto \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Exercice 6 – *CCP 2010 [3/10]*
Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : x\in\mathbb{R} \mapsto nx\mathrm{e}^{-x^2\ln n}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 7 – $\sin((1+1/n)x)$ *[6/10]*
Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin\left(\left(1+1/n\right)x\right)$$

Exercice 8 – *CCP 2016 [5/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais pas uniformément sur $[-1,1]$.

Exercice 9 – *Mines 2015 [9/10]*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par $f_n(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1], \qquad f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - f_n(t)^2\right).$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de (f_n).

Exercice 10 – *CCP 2016 [4/10]*
On définit, pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t$. Ensuite, pour $x \in [0,1]$: $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_n(t)dt$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, on a $|g_n'(t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{n}\cdot$
2. Montrer que sous les mêmes hypothèses, on a $|g_n(t) - 1| \leqslant \dfrac{t\mathrm{e}^t}{n}\cdot$
3. Étudier la convergence (simple, uniforme) de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 – *Uniformément, pas normalement [3/10]*
Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais pas normalement.

Exercice 12 – *IMT 2014 [5/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}\cdot$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'on ne peut pas appliquer le théorème de dérivation à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer pourtant que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'(x)$$

2 Régularité des sommes de séries de fonctions

Exercice 13 – *Mines 2015 [9/10]*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. On définit

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n}.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la dérivabilité.

Exercice 14 – *CCP 2017 [6/10]*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$: $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\sum f_n(x)$ converge. *On note $S(x)$ la somme de cette série.*
4. Exprimer, pour $x > 0$, $S(1/x)$ en fonction de $S(x)$.
5. Étudier la continuité de S sur $[0, +\infty[$.
6. Préciser la limite de S en $+\infty$.

Exercice 15 – *IMT 2017 [6/10]*
On s'intéresse à $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que $\sum f_n'$ converge uniformément.
4. Montrer que S est monotone sur son ensemble de définition.
5. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

Exercice 16 – *CCP 2017 [8/10]*
Soient $a > 0$ et $I = [-a, a]$. On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est telle qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|\varphi(x)| \leqslant C\,|x|$.
On s'intéresse alors à l'ensemble E des fonctions f telles que $f(0) = 0$, et $f(x) - f(x/2) = \varphi(x)$ pour tout $x \in I$.

1. Montrer que l'application $\Phi : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie, puis continue, puis appartient à E.
2. Que dire de la différence de deux éléments de E ?
3. En déduire E.
4. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que Φ est dérivable.

Questions bonus :

1. Si φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, que dire de Φ ?
2. Montrer que la continuité sur I et la dérivabilité en 0 imposent l'existence de C telle que pour tout $x \in I$, $|\varphi(x)| \leqslant C\,|x|$.

Exercice 17 – *Mines 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2021... [7/10]*

1. Déterminer le domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
3. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 18 – *CCP 2016 [8/10]*

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 19 – *Centrale 2016 [6/10]*

On définit, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : x \in I = \mathbb{R}^+ \longmapsto n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur I.

   On pose, lorsque c'est défini :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

3. Montrer que pour tout α, S_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
4. Montrer que S_1 n'est pas continue en 0.
5. Montrer que pour $\alpha < 1$, S_α est continue en 0.

La fin de l'exercice (mal notée par les deux qui l'ont eu...) s'intéressait à la continuité en 0...

Exercice 20 – *Mines 2015 [5/10]*

Soient $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Déterminer les ensembles de définition D_1 et D_2 de f et g.
2. Étudier les limites de f aux bornes de D_1.
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de g.
4. Établir une relation entre f et g ; en déduire un équivalent de f en 1^+.

Exercice 21 – *CC INP 2019 (2 fois) [6/10]*

On définit, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$: $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

   On note S la somme de cette série, définie donc sur D.

2. A-t-on convergence normale de $\sum u_n$ sur D ? Sinon, sur quels intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Montrer que pour tout $x \in D$ et tout $n \geqslant 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que S est continue sur D.
5. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

3 Des indications

Exercice 1 – J'imagine que $t_n = 1 - 1/n$ fait le job. Ensuite, $|P_n|$ est maximale en $n/(n+1)$ et y vaut $O(1/n)$; puis : $|P_n(t_n)| \leqslant \|P_n\|_\infty$. La minoration $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_n^k \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n} t_n^k \geqslant (n+1)t_n^n$ doit permettre de conclure.

Exercice 2 – Il y a convergence simple vers la fonction nulle. Je pense que la tête de f_n invite à considérer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n$, qui vaut $\dfrac{n}{n+1}$, donc ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$... ce qui devrait être le cas si la convergence était uniforme.

Exercice 3 – Je serais tenté d'écrire $f_n = R_{n-1} - R_n = (R_{n-1} - S) + (S - R_n)$. Ensuite, $f_n(x_0) = O(1/n^2)$, mais $f_n(n) = 1 + 1/n \geqslant 1$, donc $\|f_n\|_\infty \geqslant 1$...

Exercice 4 – f_n est maximale en $1/n$, où elle vaut $1/2$...

Exercice 5 – Je trouve $\|f_n\|_\infty = O(1/n)$.

Exercice 6 – Divergence sur $]-1,1[\setminus\{0\}$; convergence ailleurs, uniforme sur $[1+\varepsilon, +\infty[$...

Exercice 7 – L'inégalité des accroissements finis nous donne l'inégalité classique $|\sin u| \leqslant |u|$, puis la convergence uniforme sur $[-A, A]$. On a par ailleurs : $f_n(n\pi/2) - f(n\pi/2) = \pm 1$ donc $\|f_n - f\|_\infty \geqslant 1$.

Exercice 8 – $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction identité. Pour le caractère uniforme sur $\mathbb{R}^+$, on a facilement $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{n}$, et après étude de fonction j'obtiens $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}_-} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\cdot$ On a ensuite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction qui n'est pas continue en 0...

Exercice 9 – Il s'agit d'une suite classique qui converge uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$. À t fixé, on étudie $\varphi : x \mapsto x + \frac{1}{2}(t - x^2)$: $[0, \sqrt{t}]$ est stable par φ, donc les $f_n(t)$ appartiennent à cet intervalle, sur lequel $\varphi(x) \geqslant x$, etc... Pour la convergence uniforme, on a :

$$0 \leqslant \sqrt{t} - f_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t} - f_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + f_n(t)\right)\right) \leqslant \sqrt{t}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)\cdot$$

Ensuite, $\left|f_n(t) - \sqrt{t}\right| \leqslant \sqrt{t}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n$, et une étude de $\varphi : x \mapsto x(1 - x/2)^n$ donne ensuite $\|\varphi\|_\infty \sim \dfrac{2}{\mathrm{e}n}$, ce qui permet de conclure en recollant les morceaux éparpillés !
On a trouvé une famille d'applications polynomiales convergeant uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$; c'est la première étape pour prouver que toute application continue sur $[0,1]$ (ou tout autre segment) peut être approchée uniformément par une suite d'applications polynomiales (« théorème de Weierstraß »).

Exercice 10 – Mouais... cet énoncé me semble étrange. Bon, l'inégalité des accroissements finis doit permettre de traiter la deuxième question...

Exercice 11 – Majoration classique du reste d'une série alternée. On a par ailleurs $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot$

Exercice 12 – « Préciser $f_n'\left(\frac{1}{n}\right)$ » (indication en cours de planche).

Exercice 13 – Exercice très intéressant, le résultat n'étant pas donné ! La définition et la continuité (convergence uniforme donc normale sur $[-A, A]$) ne pose aucun problème. Pour la dérivabilité, on montre que f n'est pas dérivable en a_0 en considérant (pour $u \neq 0$) $\delta(u) = \dfrac{f(a_0 + u) - f(a_0)}{u}$: c'est la somme de $\dfrac{|u|}{u}$ (qui vaut 1 ou -1 selon le signe de u) et d'une somme de termes... majorée en valeur absolue par $\dfrac{1/3}{1 - 1/3} = \dfrac{1}{2}$, donc $\delta(u)$ n'a pas de limite en 0 ($\delta(u) - \delta(-u) \geqslant 1$ pour u assez petit). Ainsi, f n'est pas dérivable en a_0, et il en va de même pour tous les a_n.
Si x n'est pas dans l'adhérence de $A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ on prouve sans trop de mal la caractère $\mathcal{C}^1$ de f au

voisinage de x.
Enfin, si x est dans l'adhérence de A sans être dans A, on montre que f est dérivable en x. Initialement, un calcul faux m'a fait dérailler... Mais a posteriori, il suffit de considérer $\delta(u) = \frac{f(t+u)-f(t)}{u}$, pour $u \neq 0$. Il s'agit d'une somme de série à laquelle on peut appliquer (avec un peu de soin) le théorème de la double limite, chaque terme possédant une limite lorsque u tend vers 0, et la somme étant dominée (ce qui nous fournit la convergence normale donc uniforme).

Exercice 14 – Sauf erreur, $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2} \cdots$

Exercice 15 – Une vague connaissance des séries alternées aidera le candidat. Pour le dernier point, il me semble que le théorème de double-limite s'applique (convergence uniforme...).

Exercice 16 – Les convergences me semblent normales, grâce à la condition sur φ. Pour prouver cette condition sur φ lorsque cette fonction est dérivable en 0, on note que le rapport $\frac{\varphi(x)}{x}$ possède une limite finie en 0 et est continu sur $]0,a]$, donc (petite epsilonisation) est borné sur $]0,a]$ (et aussi bien entendu sur $[-a,0[$).

Exercice 17 – La convergence des séries dérivées est normale sur $[a,+\infty[$, d'où le caractère $\mathcal{C}^\infty$. Au voisinage de 0, une comparaison somme/intégrale fournit comme équivalent : $\frac{2}{x^2}\cdot$ Au fait :

```
> int(exp(-sqrt(u)),u=0..infinity);
```

$$2$$

Et en $+\infty$? Prolongez l'exercice...

Exercice 18 – Il y a convergence normale sur $[-A,A]$ (mais pas sur $\mathbb{R}$, au passage : regarder $f_n(n)$). À n fixé, on a $\frac{f_n(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{n^2}$ quand x tend vers 0, et on a alors sans problème (majoration de la différence, ou double-limite)

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad (= \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6})$$

Ensuite, toujours à n fixé, on a $f_n(x) \sim \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. La série $\sum \frac{1}{x}$ étant divergente, on évalue alors plutôt $f(x)$ par une comparaison somme/intégrale, qui donne : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\cdot$

Exercice 19 – $\|f_n\|_\infty = f_n(1/n) = \frac{n^{\alpha-1}}{\mathrm{e}} \cdots$ En question subsidiaire, on pourra vérifier que S_0 n'est PAS continue en 0.

Exercice 20 – Pour f, c'est dans le cours ! Alors que f est définie sur $]1,+\infty[$, l'application g l'est sur $]0,+\infty[$, et le contrôle du reste d'une série alternée est omniprésent pour les convergences uniformes. Enfin, avec le bricolage habituel consistant à faire apparaître/disparaître les termes d'indice pair, on obtient $g(x) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)$ fournissant (continuité de g en 1) facilement un équivalent de f en 1^+ ; équivalent qu'on pourrait également établir par une comparaison somme-intégrale comme dans le cours (bon, OK je le donne : $f(1+u) \sim \frac{1}{u}$).

Exercice 21 – Il y a convergence simple sur $[1,+\infty[$. Le maximum de u_n est pris en $\mathrm{e}^{1/n}$ et vaut $\frac{1/\mathrm{e}}{n\ln n}$, donc il n'y a pas convergence normale sur $[1,+\infty[$ ou même sur $]1,+\infty[$, mais il y aura convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ avec $a > 1$. La majoration proposée (qui donnera la convergence uniforme donc la continuité) s'obtient en majorant tous les $\frac{1}{\ln k}$ par $\frac{1}{\ln(n+1)}$ d'une part, et en notant que l'inégalité bien connue $\ln(1+u) \leqslant u$ se translate en $\ln(x) \leqslant x-1$... Pour la dernière question, on peut s'intéresser à $x^2 S(x)$ au voisinage de $+\infty$. Il y a convergence normale de la série en jeu sur $[2,+\infty[$ par exemple, et le théorème de la double limite s'applique pour nous donner : $S(x) = o(1/x^2)$ au voisinage de $+\infty$.