CCP PC 2013 - maths 1

Préliminaires :

1. Par définition, λ est valeur propre de A si et seulement s'il existe X non nul tel que $AX = \lambda X$ ou encore $x \neq 0$ tel que tel que $u(x) = \lambda x$ (avec u ce qu'on imagine, n'est-ce pas), ce qui est équivalent à la non injectivité ou encore (dimension finie) non bijectivité de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$, ce qui est équivalent à la nullité de son déterminant, qui est bien le déterminant de $A - \lambda I_n$.
2. C'est presque une tautologie : si u est diagonalisable, alors toute base de diagonalisation est constituée de vecteurs propres. Réciproquement, que dire ?
3. Si u possède n vleurs propres distinctes, alors u possède n sous-espaces propres. Ces sous-espaces propres sont en somme directe, donc la dimension de cette somme est la somme des dimensions. Or chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1, donc la somme des sous-espaces propres est incluse dans E et de dimension au moins n : c'est donc E, ce qui prouve la diagonalisabilité de u.

Partie I : Étude dans un cas particulier

I.1. a. Le spectre de $A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est clair : 0 est valeur propre de multiplicité au moins 2 (rang égal à 1) et -3 est également valeur propre – associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit celui de A :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, -2\}}$$

Rappel bien pratique :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A + \alpha I) \iff \lambda - \alpha \in \mathrm{Sp}(A)$$

Mais je pense que vous aurez calculé le polynôme caractéristique, ce qui n'a rien de déconnant, même si c'est moins efficace.

b. On a tout d'abord $Au_1 = u_1$, $Au_2 = u_2$ et $Au_3 = -u_3$; il s'agit donc de vecteurs propres. Il reste à montrer que c'est une base, ou encore que cette famille de trois vecteurs (en dimension 3) est génératrice. Or :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3,$$

et $\mathcal{F}$ est bien génératrice.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ constituée de vecteurs propres de } A.}$$

c. D'après la question précédente :

$$\boxed{\text{OUI.}}$$

d. Tout d'abord, $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à u_1, donc u_1 n'est pas vecteur propre pour B ; il en va de même pour u_2 et u_3, puisque $Bu_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}$ et $Bu_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \star \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Aucun des éléments de } \mathcal{F} \text{ n'est vecteur propre commun à } A \text{ et } B.}$$

I.2. a. Au vu de la suite, il n'est pas interdit de penser que 2 est peut-être dans le spectre de B. Et de fait, $B - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ a pour rang 1, donc 2 est valeur propre, avec même $E_2(B)$ de dimension $3-1=2$. Ensuite, si on note λ la « troisième » valeur propre complexe (on peut trigonaliser, et 2 est présent au moins deux fois sur la diagonale), la trace de B vaut d'une part $4+\lambda$ et d'autre part 6, donc $\lambda = 2$:

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{2\}}$$

On pouvait aussi voir que $(B-2I)^2 = 0$*, donc* $(X-2)^2$ *est un polynôme annulateur, donc* $\mathrm{Sp}(B) \subset \{2\}$.

b. On a vu que $B - 2I$ est de rang 1, d'image dirigée par exemple par sa première colonne, qui n'est autre que u_4. Le théorème du rang nous donne alors :

$$\dim\left(E_2(B)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(B - 2I\right)\right) = 3 - \dim\left(\mathrm{Im}\left(A - 2I\right)\right) = 3 - 1 = 2.$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\,_2(B) = \mathrm{Vect}(u_4) \text{ et } \dim\left(E_2(B)\right) = 2.}$$

c. Puisque B ne possède qu'une seule valeur propre, sa diagonalisabilité entraînerait qu'elle soit semblable à $2I$ donc *égale* à $2I$, ce qui se serait vu !

$$\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

I.3. a. Tout d'abord, $u_1 \in E_1(A) \setminus E_2(B)$, donc $E_1(A) \cap E_2(B)$ est un sous-espace **strict** de $E_1(A)$, donc de dimension au plus 1. Ensuite, $Au_5 = u_5$ et $Bu_5 = 2u_5$, donc $E_1(A) \cap E_2(B)$ contient le vecteur non nul u_5. Puisqu'il est de dimension au plus 1, l'affaire est entendue :

$$\boxed{E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(u_5)}$$

b. On cherche les vecteurs non nuls appartenant à $E_1(A) \cap E_2(B)$ (c'est fait : c'est la droite précédemment trouvée privée du vecteur nul) et ceux appartenant à $E_{-2}(A) \cap E_2(B)$; or ce dernier sous-espace est un sous-espace de la droite $\mathrm{Vect}(u_3)$, et ne contient pas u_3 (car u_3 n'est pas vecteur propre pour B), donc est réduit à $\{0\}$.

$$\boxed{\text{Les vecteurs propres communs à } A \text{ et } B \text{ sont les } \alpha u_5, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K}^*.}$$

Attention à bien enlever le vecteur nul.

I.4. a. Plissons les yeux et calculons de tête :

$$\boxed{[A,B] = C}$$

Ou encore :

```
from numpy import array

A = array([[0,-1,-1], [-1,0,-1], [-1,-1,0]])
B = array([[3,-3,-1], [0,2,0], [1,-3,1]])
C = array([[-5,3,-1], [-2,6,2], [-5,3,-1]])

def lie(foo, bar):
    return foo.dot(bar)-bar.dot(foo)

>>> lie(A,B) - C
array([[0, 0, 0],
       [0, 0, 0],
       [0, 0, 0]])
```

b. Bon, un petit calcul de polynôme caractéristique...

$$\begin{aligned}
\chi_C &= \begin{vmatrix} X+5 & -3 & 1 \\ 2 & X-6 & -2 \\ 5 & -3 & X+1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (X+1)L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}{=}} \begin{vmatrix} X+5 & -3 & 1 \\ 2X+12 & X-12 & 0 \\ -6X-X^2 & 3X & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2X+12 & X-12 \\ -6X-X^2 & 3X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 2X+12 & X-12 \\ -6-X & 3 \end{vmatrix} = X(X+6) \begin{vmatrix} 2 & X-12 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

soit $\chi_C = X(X+6)(X-6)$. La matrice C possède donc trois valeurs propres distinctes en dimension 3, donc est diagonalisable. Plus précisément, elle est même semblable à $\mathrm{Diag}(0, 6, -6) = D$.

$$\boxed{C \text{ est semblable à } D\text{, et a donc le même rang, à savoir 2.}}$$

On garde cet exemple en mémoire : A et B ont un vecteur propre commun, et le rang de leur « crochet de Lie » vaut 2.

Partie II : Condition nécessaire et conditions suffisantes

II.1. a. On suppose : $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$. On a alors :

$$[A, B]e = ABe - BAe = A(\underbrace{Be}_{\mu e}) - B(\underbrace{Ae}_{\lambda e}) = \mu \underbrace{Ae}_{\lambda e} - \lambda \underbrace{Be}_{\mu e} = (\mu\lambda - \lambda\mu)e = 0.$$

$$\boxed{e \in \mathrm{Ker}\,([A, B])}$$

b. La question précédente nous assure que $\mathrm{Ker}\,([A, B])$ est de dimension strictement positive. Le théorème du rang nous assure alors :

$$\boxed{\mathrm{rg}([A, B]) < n}$$

Le rapport du jury semble dire que les candidats ont été assez flous sur cette question ; précisons donc. On parle du noyau et d'image de matrices au sens du noyau et de l'image de leurs applications canoniquement associées, qui sont des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ – ou encore des endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ – qui est bien de dimension n.

II.2. Tout d'abord, $\mathrm{Sp}(A)$ est non vide (sur $\mathbb{C}$, χ_A possède une racine, qui est donc valeur propre de A) ; on fixe alors λ une telle valeur propre. Supposons ensuite $[A, B] = 0$: on a alors $\mathrm{Ker}\,([A, B]) = E$ ($\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ selon affinités), donc contient $E_\lambda(A)$, ce qui établit $\mathcal{H}$.

$$\boxed{\text{Si } [A, B] = 0\text{, alors } A \text{ et } B \text{ vérifient } \mathcal{H}.}$$

II.3. a. Le rapport du jury attend que l'on prouve la linéarité de ψ ; yeah ! Prenons donc $X_1, X_2 \in E_\lambda(A)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a alors :

$$\psi(\alpha X_1 + \beta X_2) = B(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha BX_1 + \beta BX_2 = \alpha\psi(X_1) + \beta\psi(X_2),$$

ce qui établit la linéarité. Le plus important reste le caractère « endo » : il s'agit de fixer $X \in E_\lambda(A)$ (hop, c'est fait) et montrer que $\psi(X) \in E_\lambda(A)$, c'est-à-dire : $A\psi(X) = \lambda\psi(X)$:

$$A\psi(X) = ABX = (AB - BA)X + BAX = [A, B]X + B(\lambda X) = \lambda BX$$

(car $X \in E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}\,([A, B])$ donc $[A, B]X = 0$). Ainsi, $A\psi(X) = \lambda\psi(X)$.

$$\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } E_\lambda(A).}$$

b. Comme on l'a vu plus haut – et puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$ – ψ possède une valeur propre λ, et un vecteur propre associé, disons $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$ (ne pas oublier qui est l'espace ambiant !). On a alors d'une part $AX = \lambda X$, et d'autre part l'existence de α tel que $\psi(X) = \alpha X$, c'est-à-dire $BX = \alpha X$, et X (non nul) est bien un vecteur propre pour B comme pour A.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ possèdent un vecteur propre commun.}}$$

II.4. En dimension 1, les endomorphismes sont étranges mais simples : ce sont des homothéties $x \mapsto \lambda x$! Tout vecteur (non nul) est alors vecteur propre commun à tous les endomorphismes... et il existe bien un tel vecteur non nul !

$$\boxed{\mathcal{P}_1 \text{ est vérifiée.}}$$

II.5. a. On a supposé que pour toute valeur propre μ de A, $E_\mu(A) \not\subset \mathrm{Ker}\,([A, B])$. C'est vrai en particulier pour $\mu = \lambda$, et il existe donc $u \in E_\lambda(A)$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\,(C)$, ce qui est ce qu'on cherchait.

$$\boxed{\text{Il existe } u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ tel que } Au = \lambda u \text{ et } Cu \neq 0.}$$

b. Par hypothèse, $\mathrm{Im}\,(C)$ est de dimension $\mathrm{rg}(C) = 1$, et la question précédente nous dit que Cu est un vecteur non nul de cette droite, donc il la dirige :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(C) = \mathrm{Vect}\,(Cu)}$$

c. Pour montrer que la droite dirigée par $v = Cu$ est incluse dans $\mathrm{Im}_{\lambda}(A)$, il suffit de montrer que v appartient à $\mathrm{Im}_{\lambda}(A)$, c'est-à-dire s'écrit $(A - \lambda I_n)x$ pour un certain $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Or :

$$v = Cu = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu = (A - \lambda I_n)(Bu),$$

et on a bien $v \in \mathrm{Im}_{\lambda}(A)$.

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(C) \subset \mathrm{Im}_{\lambda}(A)}$$

d. Déjà, $A - \lambda I_n \neq 0$ (si $A = \lambda I_n$, alors $C = 0$ n'est pas de rang 1), donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant 1$. Ensuite, λ est valeur propre de A, donc $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ est de dimension strictement positive, donc $\mathrm{Im}\,(A - \lambda I_n)$ est de dimension strictement plus petite que n.

$$\boxed{1 \leqslant \dim\,(\mathrm{Im}_{\lambda}(A)) \leqslant n - 1}$$

e. Les deux premiers points sont de simples vérifications :
- $[A, A - \lambda I_n] = 0$ car A commute avec $A - \lambda I_n$;
- $[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - \lambda B - AB + \lambda B = -C$.

$$\boxed{[A, A - \lambda I_n] = 0 \text{ et } [B, A - \lambda I_n] = -C.}$$

La stabilité de $\mathrm{Im}_{\lambda}(A)$ par φ et ψ est à peu près aussi excitante... Prenons donc $Y \in \mathrm{Im}_{\lambda}(A)$ – disons $Y = (A - \lambda I)X$ – et montrons que $\varphi(X)$ et $\psi(X)$ sont encore dans $\mathrm{Im}_{\lambda}(A)$.
- $\varphi(Y) = \varphi((A - \lambda I_n)X) = A(A - \lambda I_n)X = (A - \lambda I_n)AX$ (A commute avec $A - \lambda I_n$) donc $\varphi(Y) \in \mathrm{Im}_{\lambda}(A)$;
- $\psi(Y) = B(A - \lambda I_n)X = (A - \lambda I_n)BX - CX$. Le premier terme de cette différence est bien entendu dans $\mathrm{Im}_{\lambda}(A)$... mais le second aussi puisque $\mathrm{Im}\,(C) \subset \mathrm{Im}_{\lambda}(A)$ (voir deux questions plus haut). Ainsi, $\psi(Y) \in \mathrm{Im}_{\lambda}(A)$.

$$\boxed{\varphi \text{ et } \psi \text{ réalisent des endomorphismes de } \mathrm{Im}_{\lambda}(A).}$$

f. φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathrm{Im}_{\lambda}(A)$ qui est de dimension $k \in [\![1, n-1]\!]$, avec $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) = \mathrm{rg}([A, B]) = 1$, or $\mathcal{P}_k$ est vérifiée, donc φ et ψ possèdent un vecteur propre commun... qui sera vecteur propre commun à A et B.

$$\boxed{\varphi \text{ et } \psi, \text{ mais aussi } A \text{ et } B, \text{ ont un vecteur propre commun.}}$$

II.6. Recollons les morceaux :
- La question II.4 a initialisé la récurrence.
- Supposons maintenant $n \geqslant 2$, avec $\mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n-1)$ vérifiées et montrons $\mathcal{P}(n)$ sous sa forme matricielle. On fixe pour cela $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}([A, B]) \leqslant 1$ et on va montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
  - — Si $[A, B] = 0$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$ (question II.2) donc ont un vecteur propre commun (question II.3).
  - — Sinon, $[A, B]$ est de rang 1, et alors soit A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$ et c'est gagné (toujours d'après II.3), soit ils ne la vérifient pas, et on peut alors appliquer la question II.5, dont les hypothèses sont bien vérifiées, qui nous assure que A et B ont un vecteur commun, et c'est gagné à nouveau !

  On vient de montrer que A et B possédaient un vecteur propre commun, ce qui établit $\mathcal{P}_n$.

Le principe de récurrence (avec prédécesseurs) nous permet d'affirmer :

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est vérifiée pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

Partie III : Étude d'un autre cas particulier

III.1. Partons de $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ et écrivons (en passant par $\mathbb{K}(X)$) : $P(1/X) = \sum_{i=0}^{2n} a_i X^{-i}$ (oui, changeons **le nom** de l'indice...) puis $g(P) = \sum_{i=0}^{2n} a_i X^{2n-i}$, et il n'y a plus qu'à faire le changement d'indice (pas seulement le nom !) $k = 2n - i$ pour obtenir le résultat demandé.

$$\boxed{g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k}$$

III.2. Tout d'abord, les linéarités. Celle de f est claire (« linéarité de la dérivation »). Pour g, détaillons [1] en fixant $P_1, P_2 \in E$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$g(\alpha P_1 + \beta P_2) = X^{2n}(\alpha P_1 + \beta P_2)(1/X) = \alpha X^{2n} P_1(1/X) + \beta X^{2n} P_2(1/X) = \alpha g(P_1) + \beta g(P_2),$$

et g est bien linéaire. [2]

Passons au fait que E est stable par f et g. Pour f, c'est clair à nouveau. Pour g, la question précédente nous assure qu'effectivement, si $P \in E$, alors $g(P) \in E$, et c'est gagné.

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ réalisent des endomorphismes de } E.}$$

Le sujet aurait pu faire noter que $g \circ g = \mathrm{Id}_E$: g est une symétrie. Cela aurait facilité la rédaction d'un certain nombre de questions ultérieures.

III.3. **a.** Supposons : $g(P) = \lambda P$, avec $P \neq 0$. Avec la remarque précédente, λ vaut ± 1, donc le degré de λP est égal au degré de P. Or, si ce degré était strictement plus petit que n, alors celui de $g(P)$ serait strictement plus grand que n, ce qui est absurde puisqu'il est égal au degré de P.

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un vecteur propre de } g, \text{ alors } \deg(P) \geqslant n.}$$

b. Déjà, $g(X^n) = X^n$, et puisque $X^n \neq 0$:

$$\boxed{X^n \text{ est vecteur propre de } g.}$$

Il semblerait que le jury soit aussi casse-pieds que moi sur la non-nullité des vecteurs propres...

III.4. **a.** On a, pour $P \in E$, $f^i(P) = P^{(i)}$ (« dérivée i-ème »), donc $f^i(P) = 0$ si et seulement si $\deg(P) < i$:

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]}$$

Disons-le tout net : ici, le jury abuse (il semble réclamer une justification à la fois détaillée mais pas trop longue pour le fait que $P^{(i)} = 0$ si et seulement si $\deg(P) < i$) ; fallait-il préciser qu'une récurrence établirait que pour $0 \leqslant j \leqslant \deg(P)$, $P^{(j)}$ est de degré $\deg(P) - j$?

b. Tout d'abord, $f^i(1) = 0$, donc 0 est valeur propre. Ensuite, si $f(P) = \lambda P$ **avec** $P \neq 0$, alors d'une part le degré de $f(P) = P^{(i)}$ est strictement plus petit que celui de P, et d'autre part, $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ (ce qui aboutit à une contradiction) SAUF SI $\lambda = 0$. Ainsi, $\lambda = 0$ est la seule valeur propre possible pour f^i.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}}$$

III.5. Tout d'abord, si $i \geqslant n+1$, alors X^n est vecteur propre commun à f et à g.

Réciproquement, si f^i et g possèdent un vecteur propre commun – disons P – alors $f^i(P) = 0$ (question II.4.b) donc $\deg(P) \leqslant i - 1$ (question III.4.a). Mais par ailleurs (question III.3.b) $\deg P \geqslant n$, donc $n \leqslant \deg(P) \leqslant i - 1$.

$$\boxed{f^i \text{ et } g \text{ possèdent un vecteur propre commun si et seulement si } i \geqslant n+1.}$$

III.6. A_n et B_n sont des matrices de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$, et leur j-ème colonnes représentent les coordonnées de respectivement $f(X^{j-1}) = (j-1)X^{j-2}$ et $g(X^{j-1}) = X^{2n+1-j}$; ainsi :

$$\forall i, j \in [\![1, 2n{+}1]\!], \qquad (A_n)_{i,j} = \begin{cases} k-1 & \text{si } j \geqslant 2 \text{ et } i = j-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad (B_n)_{i,j} = \begin{cases} j-1 & \text{si } i = 2n+2-j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Comme réclamé par le rapport du jury.
2. En lisant le calcul précédent, on aura bien dit « X^{2n} FOIS .... » et « $\alpha P_1 + \beta P_2$ DE (ou EN) $1/X$ » ; bien entendu...

$$\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2n \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & (0) & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

C'est bien plus clair sous forme « matrice » que sous forme « $m_{i,j} = \cdots$ » il me semble...

III.7. a. Déjà, A_1 et B_1 sont bien comme annoncées ! Ensuite, un simple calcul fournit :

$$\boxed{A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b. J'obtiens (honnêtement, à la main ; juré !) :

$$\boxed{[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } [A_1^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ sont de rang 2.}}$$

Pour les rangs, on a simplement constaté que dans les deux cas, deux colonnes étaient linéairement indépendantes, mais les trois colonnes sont liées. Vérifions les calculs avec Python :

```
A1 = array([[0,1,0], [0,0,2], [0,0,0]])
B1 = array([[0,0,1], [0,1,0], [1,0,0]])

>>> lie(A1, B1)
array([[ 0,  1,  0],
       [ 2,  0, -2],
       [ 0, -1,  0]])
>>> lie(A1.dot(A1), B1)
array([[ 2,  0,  0],
       [ 0,  0,  0],
       [ 0,  0, -2]])
```

Et on constate que j'avais fait une erreur sur le dernier coefficient calculé (2 et non −2), ce qui ne changeait pas le rang.

c.
- On a $\mathrm{rg}([A_1, B_1]) = 2 < 3$, mais A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun (question III.5 : ici, $i = 1 < n+1 = 2$).

$$\boxed{\text{Pour que } A \text{ et } B \text{ aient un vecteur propre commun, il n'est pas } \textbf{suffisant} \text{ d'avoir } \mathrm{rg}([A,B]) < n.}$$

- On se souvient (question I.4.b) avoir vu deux matrices A et B ayant un vecteur propre commun, mais vérifiant $\mathrm{rg}([A, B]) = 2$.

$$\boxed{\text{Pour que } \varphi \text{ et } \psi \text{ aient un vecteur propre commun, il n'est pas } \textbf{nécessaire} \text{ d'avoir } \mathrm{rg}([\varphi,\psi]) \leqslant 1.}$$

On pouvait aussi noter que A_1^2 et B_1 ont X comme vecteur commun, et $\mathrm{rg}([A_1^2, B_1]) = 2$... Gageons que si cette question a eu très peu de succès, ce n'est pas pour des problèmes d'algèbre linéaire, mais à cause de ces sombres histoires de nécessaire et de suffisant...

Partie IV : Forme normale pour un vecteur propre

IV.1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre λ (ils existent car $\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 2$). Si $x_1 = 0$, c'est fini : X_1 est sous forme normale. Sinon, le vecteur $Z = Y - \dfrac{y_1}{x_1} X$ est dans $E_\lambda(A)$, est différent de 0 (X et Y sont linéairement indépendants) et a sa première composante nulle : c'est gagné.

$$\boxed{A \text{ admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre } \lambda.}$$

IV.2. a. Il suffit d'exhiber UNE matrice antisymétrique non nulle ! Par exemple (puisque $n \geqslant 2$) :

$$M = E_{1,2} - E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C}).$$

$$\boxed{\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0\}}$$

b. Soient $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ et $i \in [\![1, n]\!]$. En regardant droit dans les yeux le coefficient (i, i) dans la relation ${}^tM = -M$, on obtient : $m_{i,i} = -m_{i,i}$ puis $m_{i,i} = 0$, donc la i-ème colonne de M appartient à $\mathcal{N}$.

$$\boxed{\text{Les colonnes de } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \text{ appartiennent à } \mathcal{N}.}$$

c. Je vais m'épargner les preuves de linéarité[3] pour me concentrer sur la stabilité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ par φ et ψ. Soit donc $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. Il s'agit de montrer que $\varphi(M)$ et $\psi(M)$ sont antisymétriques :

- ${}^t(\varphi(M)) = {}^t(AM + M{}^tA) = \underbrace{{}^tM}_{=-M}{}^tA + \underbrace{{}^t({}^tA)}_{=A}\underbrace{{}^tM}_{=-M} = -(AM + M{}^tA) = -\varphi(M)$, donc $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
- ${}^t(\psi(M)) = {}^t(AM{}^tA) = \underbrace{{}^t({}^tA)}_{=A}\underbrace{{}^tM}_{=-M}{}^tA == -AM{}^tA = -\psi(M)$, donc $\psi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

$$\boxed{\varphi \text{ et } \psi \text{ définissent des endomorphismes de } \mathcal{A}_n(\mathbb{C}).}$$

d. Fixons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'une part :

$$(\varphi \circ \psi)(M) = \varphi(AM{}^tA) = A(AM{}^tA) + (AM{}^tA){}^tA = A^2M{}^tA + AM({}^tA)^2.$$

D'autre part :

$$(\psi \circ \varphi)(M) = \psi(AM + M{}^tA) = A(AM + M{}^tA){}^tA = A^2M{}^tA + AM({}^tA)^2.$$

Ainsi, $(\varphi \circ \psi)(M) = (\psi \circ \varphi)(M)$ pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, et donc :

$$\boxed{\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi}$$

IV.3. a. Le premier point est élémentaire. Le second ne l'est pas. Si on avait $B = 0$, alors on aurait $X_1{}^tX_2 = X_2{}^tX_1$. Or ces deux matrices sont certes de rang 1, mais[4] ont leurs images respectivement portées par X_1 et X_2 qui sont non colinéaires : ces matrices ne peuvent donc être égales, ce qui prouve le deuxième point.
Les deux derniers points se prouvent de façon assez mécanique, pour peu qu'on sache transposer un produit, et qu'on se souvienne des relation $AX_1 = \lambda_1X_1$ et $AX_2 = \lambda_2X_2$.

$$\boxed{B \text{ vérifie les quatre propriétés demandées.}}$$

b. Tout d'abord,

$$(A - \lambda_2I_n)B = AB - \lambda_2B = (\lambda_1 + \lambda_2)B - B{}^tA - \lambda_2B = \lambda_1B - B{}^tA.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1I_n)(A - \lambda_2I_n)B &= A\left(\lambda_1B - B{}^tA\right) - \lambda_1\left(\lambda_1B - B{}^tA\right) \\ &= \lambda_1(\underbrace{AB + B{}^tA}_{(\lambda_1+\lambda_2)B}) - \underbrace{AB{}^tA}_{\lambda_1\lambda_2B} - \lambda_1^2B = \underbrace{\left(\lambda_1\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2\right)}_{0}B,\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\boxed{(A - \lambda_1I_n)(A - \lambda_2I_n)B = 0}$$

3. Que le rapport semble tout de même réclamer, ce qui n'est guère raisonnable pour une telle épreuve en temps limité...
4. Vous vous souvenez de ce qu'on obtient en multipliant une matrice-colonne et une matrice-ligne ?

c. Écrivons B par colonnes : $B = (C_1 \vdots C_2 \vdots \cdots \vdots C_n)$. La relation $AB = \lambda_2 B$ se traduit :

$$(AC_1 \vdots AC_2 \vdots \cdots \vdots AC_n) = (\lambda_2 C_1 \vdots \lambda_2 C_2 \vdots \cdots \vdots \lambda_2 C_n).$$

On prend i tel que $C_i \neq 0$ ($B \neq 0$ possède bien une telle colonne non nulle...), et on obtient $AC_i = \lambda_2 C_i$, ce qui fournit un vecteur propre (rappelons que C_i est non nul !) sous forme normale car C_i est une colonne **d'une matrice antisymétrique**.

$$\boxed{\text{Au moins l'une des colonnes de } B \text{ est un vecteur propre de } A \text{ sous forme normale.}}$$

d. En écrivant à nouveau en colonnes : $C = (A - \lambda_2 I_n)B = (C'_1 \vdots C'_2 \vdots \cdots \vdots C'_n)$, on a $AC = \lambda_1 C$ donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $AC'_i = \lambda_1 C'_i$. Mais puisque $C \neq 0$, il existe i_0 tel que $C'_{i_0} \neq 0$. Or C'_{i_0} s'écrit $(A - \lambda_2 I_n)C_{i_0}$ (avec C_{i_0} une colonne de B). Puisque C_{i_0} est dans $\mathcal{N}$, on a bien réussi à écrire C'_{i_0} sous la (deuxième) forme définissant les formes normales (relire la définition – strange – des formes normales).

$$\boxed{A \text{ possède un vecteur propre sous forme normale.}}$$

Notons qu'arrivés ici, on a prouvé l'existence de vecteurs propres sous forme normale lorsque
— *il existe un sous-espace propre non réduit à une droite ;*
— *il existe au moins deux valeurs propres.*
Le seul cas qui reste à traiter est celui où on a une seule valeur propre, avec le sous-espace propre associé de dimension 1. *C'est le rôle de cette dernière partie (sans se soucier de la dimension du sous-espace caractéristique, accessoirement).*

IV.4. a. Avec le recul suffisant, c'est en fait très simple : les applications $\varphi : M \mapsto AM + M\,{}^t\!A$ et $\psi : M \mapsto AM\,{}^t\!A$ réalisent des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ qui commutent (question IV.2), donc $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) = 0$, donc (partie II) possèdent un vecteur propre commun. Comme on parle d'endomorphismes de $\mathcal{A}_n$, ce vecteur propre est une matrice B qui vérifie exactement les conditions imposées.

$$\boxed{\text{Et c'est gagné.}}$$

b. $A^2 B = A(AB) = A(\alpha B - B\,{}^t\!A) = \alpha AB - \beta B$, donc :

$$\boxed{(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0}$$

c. Le polynôme **complexe** $P = X^2 - \alpha X + \beta$ est scindé et unitaire, donc s'écrit $(X - \gamma)(X - \delta)$. Il reste à considérer $P(A)$ qui vaut d'une part $A^2 - \alpha A + \beta I_n$ et d'autre part $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)$. On conclut grâce à la question précédente.

$$\boxed{\text{Il existe } \gamma, \delta \in \mathbb{C} \text{ tels que } (A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0}$$

d. C'est comme à la question IV.3.c.

$$\boxed{A \text{ possède un vecteur propre sous forme normale.}}$$

e. C'est comme à la question IV.3.c, car $\delta = \lambda$ est valeur propre de A.

$$\boxed{A \text{ possède un vecteur propre sous forme normale.}}$$

f. Ici δ n'est pas valeur propre de A, donc :

$$\boxed{A - \delta I_n \text{ est inversible.}}$$

Les matrices $A - \delta I_n$ et $A - \gamma I_n$ commutent, donc

$$(A - \delta I_n)(A - \gamma I_n)B = (A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0.$$

Or $A - \delta I_n$ est inversible, donc en multipliant la relation précédente par $(A - \delta I_n)^{-1}$, on obtient :

$$\boxed{(A - \gamma I_n)B = 0}$$

g. Dans ce dernier cas – $(A - \delta I_n)B \neq 0$ et δ n'est pas la valeur propre de A – on a $(A - \gamma I_n)B = 0$, donc le raisonnement de la question IV.4.d s'applique, et ici encore :

$$\boxed{A \text{ possède un vecteur propre sous forme normale.}}$$

La boucle est bouclée

1/ CONSIGNES GENERALES :

1.a) Présentation du sujet

Le sujet se proposait d'étudier des conditions liées à l'existence d'un vecteur propre commun à deux matrices A et B, et de donner une application de cette existence.

La **partie I** étudiait la problématique dans un cas simple où les calculs étaient très largement guidés et devaient pouvoir se faire en une trentaine de minutes.

La **partie II** abordait de façon plus théorique la recherche d'une condition nécessaire, puis de conditions suffisantes pour admettre un vecteur propre commun. Le découpage des questions de cette partie était suffisamment fin pour que beaucoup de questions puissent être abordées en admettant les questions précédentes. Les problèmes abordés dans cette partie relevaient bien souvent de techniques très proches de celles vues dans le programme de PC (stabilité de sous-espaces propres ou d'ensembles-image sous certaines conditions, existence d'une valeur propre complexe dans le cas scindé, inclusions entre ensemble, etc).

La **partie III** étudiait en profondeur un exemple simple issu des espaces vectoriels de polynômes. Cela permettait d'illustrer le caractère relatif des conditions apparues dans la partie II.

La **partie IV** étudiait de façon quasi-indépendante des parties précédentes des endomorphismes sur l'espace des matrices antisymétriques. Les questions donnaient souvent lieu à des calculs simples relevant de techniques utilisées en algèbre bilinéaire.

Le sujet, dans son ensemble, se donnait pour but d'évaluer chez les candidats la connaissance du cours, la qualité du raisonnement ainsi que l'efficacité. La longueur relative du sujet était justement un point important d'évaluation de l'efficacité des candidats. Aucune question à elle seule ne nécessitait un raisonnement combinant plusieurs idées fines et originales.

1.b) Problèmes constatés par les correcteurs

Les correcteurs de cette épreuve ont constaté d'une part que le soin et la présentation globale des copies étaient bons et d'autre part que les copies très faibles étaient peu nombreuses.

En revanche, beaucoup de correcteurs soulignent que les qualités de raisonnement et de rédaction ont encore régressé. Un grand nombre de candidats emploient un vocabulaire approximatif difficilement compatible avec la rigueur exigée.

La connaissance du cours et sa restitution correcte dans un cadre particulier semble poser désormais de nombreux problèmes. Concernant l'efficacité, on constate que trop de candidats font le choix de méthodes de calcul et de raisonnements inutilement longs, perdant ainsi un temps précieux. Tout au contraire, une petite minorité de candidats calcule, raisonne et rédige de façon juste, concise et synthétique, qualités toujours très appréciées des correcteurs.

L'orthographe est correcte dans l'ensemble sauf pour quelques rares candidats qui se refusent à toute accentuation.

La longueur de l'épreuve ne s'est pas avérée pénalisante même si les candidats ayant bien traité l'ensemble du sujet se sont fait plus rares cette année (moins de 5 %).

La partie I a été très bien réussie par tous mais elle a dû prendre trop de temps à certains candidats.

La partie II a été abordée de façon parcellaire et a engendré de nombreux problèmes de raisonnement.

La partie III a été, quant à elle, largement abordée dans son ensemble avec quelques difficultés ponctuelles de rédaction.

La question IV.1. et les questions à partir de IV.3.c. ont été rarement traitées. Les autres questions de cette partie IV ont permis en revanche à une moitié de candidats de valider des calculs en général assez formels.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Partie I

I.1.a. Très bien réussie.

I.1.b. Une réussite très relative pour une question qui ne nécessitait guère de calculs savants. Les vecteurs étant donnés explicitement, le caractère “vecteurs propres” se faisait par un calcul direct quand bien même plus de la moitié des candidats cherche une famille génératrice de chaque sous-espace propre. En revanche, la perte de temps précieux ainsi occasionnée ne doit pas pour autant servir d'alibi pour “parachuter” sans vérification détaillée le fait que la famille est libre. Par ailleurs, l'argument sur le cardinal de la famille n'apparaîssait plus que dans moins de la moitié des cas. On signale ici que cela n'a pas de sens de parler de la “dimension d'une famille”.

I.1.c. Cette question pouvait être traitée de plusieurs manières dont deux manières très rapides : A est symétrique réelle ou existence d'une base de vecteurs de propres. Malheureusement, la majorité des candidats ont choisi de comparer la dimension des sous-espaces propres aux multiplicités des valeurs propres. Quelques-uns semblaient croire que pour être diagonalisable, une matrice devait nécessairement posséder un polynôme caractéristique scindé à racines simples. Bon taux de réussite tout de même mais une perte importante de temps.

I.1.d. Très bien réussie.

I.2.a. Très bien réussie.

I.2.b. La question a souvent été traitée en commençant par $E_2(B)$(ce qui évite l'usage du théorème du rang). Le lien entre l'image d'une matrice et ses colonnes n'est pas toujours connu. En revenant à la définition de l'image, les candidats montraient alors souvent une inclusion sans justifier pleinement l'égalité entre ensembles.

I.2.c. Bien réussie.

I.3.a. Seulement une moitié des candidats a réussi pleinement à montrer l'égalité entre les deux ensembles alors que tous prétendent avoir l'égalité...

I.3.b. Question la moins bien réussie de la partie. Moins d'un tiers des candidats justifiait le fait que $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{0\}$. Très nombreuses confusions entre $\{0\}$ et l'ensemble vide qui apportaient le doute dans l'esprit du correcteur. Des difficultés à gérer la condition de non nullité des vecteurs propres dans l'écriture de l'ensemble des solutions.

I.4.a. Très bien réussie.

I.4.b. Question souvent bâclée pour gagner du temps. Des conditions "fantaisistes" pour que deux matrices soient semblables. Le polynôme caractéristique de C souvent donné sans justification sous forme factorisée $-X(X-6)(X+6)$ afin "d'arranger" les calculs.

Partie II

II.1.a. Bien réussie.

II.1.b. Le théorème du rang était bien souvent utilisé mais son écriture pour une matrice A à la place d'une application linéaire f faisait apparaître de grandes confusions. Certains candidats ont fait intervenir $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et obtenaient suivant les cas (ou les besoins) n ou n^2. Il y a aussi ceux qui parlaient du rang de A non pas pour la dimension de son image, mais bien pour le nombre de colonnes de la matrice. Que penser alors de la "dimension de A" qui ajoutait aussi à la confusion générale ?

II.2. Moyennement réussie. Sans même tenir compte de l'argument d'existence de λ qui sera surtout évalué en 3.b, l'équivalence entre "matrice nulle" et "noyau égal à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$" ne semblait pas couler de source. Le candidat se lançait alors dans le calcul et n'en ressortait pas toujours indemne.

II.3.a. Même si ce n'était pas très difficile, on s'attendait bien sûr à voir comment le candidat montrait la linéarité de ψ. La stabilité de $E_\lambda(A)$ par ψ était très proche d'un résultat du cours, quand les deux matrices commutent. Malgré cela, la réussite a été très moyenne.

II.3.b. Très mal réussie. Les correcteurs s'attendaient à voir intervenir $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et le fait que $E_\lambda(A)$ était de dimension au moins 1. Aucun de ces arguments n'a été donné en général.

II.4. Question souvent abordée mais mal réussie : la forme d'un endomorphisme en dimension 1 ne semblait pas claire aux yeux de plus de 80 % des candidats. Beaucoup de malhonnêtetés intellectuelles dans la résolution de cette question.

II.5.a. De très gros problèmes de logiques encore ici. Plus de la moitié des candidats était persuadée que la propriété $Cu \neq 0$ était conséquence de $u \neq 0$ et $\mathrm{rg}(C) = 1$.

II.5.b. Les correcteurs attendaient simplement des candidats qu'ils constatent que (Cu) était bien une famille libre de $\mathrm{Im}(C)$ de cardinal 1. Au lieu de cela, un certain nombre de candidats décidait d'écrire $\mathrm{Im}(C) = \{Cu \mid u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} = \mathrm{Vect}(Cu)$.

II.5.c. Mieux réussie à partir de la définition de l'image.

II.5.d. Bien réussie.

II.5.e. Les deux égalités ont bien été démontrées mais la stabilité de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ a posé de nombreux problèmes d'écriture, y compris pour ϕ.

II.5.f. et 6. Questions de synthèse assez peu abordées.

Partie III

III.1. Très bien réussie.

III.2. La linéarité de g méritait d'être détaillée, à défaut de celle de f ainsi que la stabilité de E par g.

III.3.a. Question souvent abordée, mais avec une réussite assez mitigée. Dans un cas sur deux, on pensait à raisonner par l'absurde, mais ce n'était que dans la moitié de ces cas que le raisonnement aboutissait clairement à une contradiction avec la non nullité du vecteur propre. Beaucoup de copies donnaient seulement l'impression d'y arriver...

III.3.b. Très bonne réussite pour la relation $g(X^n) = \lambda X^n$ avec $\lambda = 1$. La non nullité du vecteur propre encore et toujours oubliée.

III.4.a. Une double inclusion était encore nécessaire ici. Un argument par récurrence permettait par exemple de justifier l'inclusion la plus délicate. Beaucoup d'approximations et de longueurs dans la rédaction de cette question.

III.4.b. A nouveau une double inclusion. L'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Sp}(f^i)$ a été souvent bâclée. L'inclusion inverse faisait appel au degré mais la non nullité du vecteur propre a encore été oubliée, rendant le raisonnement incomplet.

III.5. Un raisonnement en deux temps nécessitant un minimum d'esprit de synthèse par rapport aux questions précédentes : malheureusement très mal réussie.

III.6. La question a permis a beaucoup de candidats de reprendre pied dans cette partie. En revanche, de nombreuses erreurs de décalage d'indice ont rendu l'écriture de A_n fausse.

III.7.a. Très bien réussie et assez souvent abordée.

III.7.b. Après plusieurs calculs, au moins l'un des deux résultats demandés finissait par être faux dans près de la moitié des cas. Il s'agissait souvent d'une erreur d'inattention dans le calcul de la différence de deux matrices, ou encore des confusions sur la valeur du rang dans des cas simples.

III.7.c. Une question de synthèse très peu abordée.

Partie IV

IV.1. La question, qui ne se voulait pas difficile, a été très peu abordée, peut-être à cause du fait qu'il fallait prendre l'initiative de faire plusieurs cas. Beaucoup de candidats semblaient persuadés (peut-être à cause de la dimension 1) qu'une famille génératrice d'un espace vectoriel E de dimension finie est figée, à une proportionnalité près.

IV.2.a. Souvent abordée, avec encore des confusions entre l'ensemble vide et $\{0\}$. Un exemple simple de matrice antisymétrique non nulle n'a été vu que dans moins de la moitié des cas.

IV.2.b. Une petit moitié de candidat savait clairement que la diagonale d'une matrice antisymétrique était constituée exclusivement de 0 et n'ont eu aucun mal à le démontrer.

IV.2.c. La linéarité a souvent été seulement esquissée, mais la stabilité a été mieux réussie.

IV.2.d. Des confusions très embarrassantes entre $\phi \circ \psi$, $\phi \circ \psi(M)$ et parfois encore $\phi(M)\psi(M)$ voire $\phi(M) \circ \psi(M)$.

IV.3.a. Les sous-questions i), iii) et iv) ont été bien traitées par les candidats qui les ont abordées. La sous-question ii) a été l'occasion de lire beaucoup d'énormités et a finalement été montrée correctement par très peu de personnes.

IV.3.b. à IV.4.g. Ces questions ont été abordées dans moins de 5 % des cas certainement par manque de temps et n'ont pas posé de problème dans ce cas.