# Nilpotents, commutants, exponentielle et logarithme de matrices

*ISUP 2004 – mathématiques 2*

## Partie I.

1. Pour changer, la question la plus difficile du problème est la première : qu'est-ce qui était attendu ? Il s'agit de convaincre le correcteur qu'on sait ce qu'est un endomorphisme :
   — $\Delta$ est bien linéaire ($\Delta(\lambda P_1 + \mu P_2) = ...$) – évitez $P$ et $P'$ !
   — Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\Delta(P)$ appartient également à $\mathbb{R}[X]$.

   $$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$$

2. Si $P$ est de degré **inférieur ou égal à** $n$, alors $P(X+1)$ également (il a le même degré que $P$), donc $P(X+1) - P(X)$ aussi. Ainsi :

   $$\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \Delta.}$$

3. Il s'agit d'exprimer, pour chaque $j \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^j)$ dans la base $\mathcal{C}_n$. Or : $\Delta(1) = 0$, et pour $j \in [\![1, n]\!]$ :

   $$\Delta(X^j) = (X+1)^j - X^j = \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} X^i.$$

   La matrice de $\Delta$ dans $\mathcal{C}_n$ va donc être un triangle de Pascal amputé de sa diagonale...

   $$\boxed{\mathrm{Mat}(\Delta, \mathcal{C}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & 0 & 2 & & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}$$

4. La matrice précédente étant triangulaire, le spectre de $\Delta_n$ se lit sur la diagonale : il est réduit à $\{0\}$. Si $\Delta_n$ était diagonalisable, on aurait alors $E = \mathrm{Ker}(\Delta_n)$, donc $\Delta_n = 0$, ce qui se serait vu. *On peut également écrire cela matriciellement, en supposant l'existence d'une matrice inversible $P$ telle que* $\mathrm{Mat}(\Delta_n, \mathcal{C}) = P.0.P^{-1}$*...*

   $$\boxed{\Delta_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

5. Matriciellement : « on sait bien » qu'une matrice triangulaire à diagonale nulle est nilpotente.
   Géométriquement : si $P$ est un polynôme non nul, alors $\Delta(P)$ est de degré strictement plus petit que $P$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta^n(P)$ est de degré strictement négatif, donc $\Delta^n(P) = 0$. Ceci étant valable pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ :

   $$\boxed{\Delta_n \text{ est nilpotent}}$$

6. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\Delta^n(X^{n+1})$ est un polynôme constant non nul, donc $\Delta^n$ n'est pas l'application nulle. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

   $$\boxed{\Delta \text{ n'est pas nilpotent}}$$

   *On aura noté que «pour tout $P$, il existe $n$ tel que $\Delta^n(P) = 0$», mais «il n'existe pas $n$ tel que pour tout $P$, $\Delta^n(P) = 0$»...*

7. Tout comme $\Delta$, l'opérateur de dérivation fait décroître strictement le degré des polynômes non nuls, et laisse donc stable les sous-espaces $\mathbb{R}_n[X]$. La matrice dans $\mathcal{C}_n$ de sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ est également triangulaire à diagonale nulle.

$$\boxed{\text{Les restrictions de } D \text{ aux } \mathbb{R}_n[X] \text{ sont nilpotentes non diagonalisables, et } D \text{ est non nilpotent.}}$$

**Partie II.**

1. D'après ce qui précède :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

De plus :

$$\boxed{A^0 = B^0 = I_3,\ A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } A^k = B^k = 0 \text{ pour tout } k \geqslant 1.}$$

2. D'après ce qui précède :

$$\boxed{\text{Les matrices } \frac{1}{\sqrt{2}}A \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}B \text{ sont deux solutions distinctes de } (E_1).}$$

3. (a) Soit $x \in \operatorname{Ker}(g)$. On a alors :

$$g\left(f(x)\right) = \left((f \circ f) \circ f\right)(x) = \left(f \circ (f \circ f)\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f(0) = 0,$$

donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$, et $\operatorname{Ker}(g)$ est donc bien stable par $f$.
Soit maintenant $y \in \operatorname{Im}(g)$. Il existe alors $x \in E = \mathbb{R}_2[X]$ tel que $y = g(x)$. On a alors :

$$f(y) = f\left((f \circ f)(x)\right) = (f \circ f)\left(f(x)\right) = g\left(f(x)\right),$$

donc $f(y)$ est bien dans $\operatorname{Im}(g)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le noyau et l'image de } g \text{ sont stables par } f.}$$

(b) Si $\lambda$ est valeur propre de $f$, alors en prenant $x$ un vecteur propre associé (donc non nul), on voit que $g(x) = f\left(f(x)\right) = \lambda^2 x$, donc $\lambda^2$ est valeur propre de $g$ donc de $J_1$, donc $\lambda = 0$ (matrice triangulaire, donc le spectre gnagnagna...) : $\operatorname{Sp}(f) \subset \{0\}$.
Réciproquement, l'image de $g$ est stable par $f$. L'image de $g$ se lit sur sa matrice dans $\mathcal{C}_2$, à savoir $J_1$ : il s'agit de $\mathbb{K}_0[X]$. Cette droite étant stable par $f$, elle nous assure que $f$ possède bien une valeur propre : $\operatorname{Sp}(f) \neq \emptyset$.

$$\boxed{\text{Le spectre de } f \text{ est réduit à } \{0\}.}$$

(c) L'énoncé guide (maladroitement) vers une analyse-synthèse...
— **Analyse :** Si $M$ est une solution de $(E_1)$, alors son application canoniquement associée $f$ stabilise $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Vect}(1)$ (ce qui impose l'allure de la première colonne) ainsi que $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Vect}(1, X)$, donc $M$ est triangulaire supérieure. Le spectre de $f$ étant réduit à $\{0\}$, les valeurs diagonales sont imposées : $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
— **Synthèse :** Réciproquement une matrice de la forme précédente a son carré qui vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $M$ est solution si et seulement si $ac = 1$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E_1)$ est :

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ ,\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\right\}}$$

4. L'analyse faite dans la question précédente reste valable : si $f\circ f=g$, alors l'image et le noyau de $g$ sont stables par $f$. Ainsi, une éventuelle solution de $M^2=J_2$ aurait sont application linéaire « canoniquement »[1] associée stabilisant à nouveau Vect(1) et Vect$(1,X)$ (image et noyau sont inversés par rapport au cas précédent). La matrice $M$ est alors nécessairement de la forme $\begin{pmatrix}0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, mais on a vu que le carré d'une telle matrice ne peut valoir $J_2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'équation } M^2=J_2 \text{ n'a pas de solution}}$$

*Autre point de vue, géométrique : une éventuelle solution de l'équation $(E_2)$ serait un nilpotent (car $J_2^3=0$) d'ordre au moins 5 (car $J_2^2\neq 0$), ce qui est impossible en dimension 3.*

## Partie III.

1. Voici une solution dont l'efficacité n'égale que la malhonnêteté :
   — Com$(f)$ est le noyau de l'application linéaire $\Phi : g\in\mathcal{L}(E)\mapsto f\circ g-g\circ f\in\mathcal{L}(E)$, donc est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.
   — Pol$(f)$ est l'image de l'application linéaire $\Phi : P\in\mathbb{R}[X]\mapsto P(f)\in\mathcal{L}(E)$, donc est à ce titre un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.

   *L'astuce consiste évidemment à ne pas vérifier la linéarité des applications citées. La fainéantise et l'efficacité étant deux qualités appréciées chez le matheux, une telle solution serait certainement validée quel que soit le concours !*
2. Hum... ça rappelle vaguement des choses... Puisque $u^{n-1}\neq 0$, on peut fixer $x_0\in E$ tel que $u^{n-1}(x_0)\neq 0$. On montre alors comme d'habitude que la famille $\big(x_0,...,u^{n-1}(x_0)\big)$ est libre ; c'est donc une base de $E$. La matrice de $u$ dans cette base est presque celle recherchée... et il suffit alors de la retourner pour avoir la forme recherchée.

$$\boxed{\text{La matrice de } u \text{ dans } \mathcal{B}=\big(u^{n-1}(x_0),...,u(x_0),x_0\big) \text{ est } N.}$$

3. On calcule de façon classique $N^k=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & (0) & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$ : $(N^k)_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } j=i+k \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

   On en déduit (par résolution de $N^kX=0$, ou avec une inclusion et la valeur du rang) :

$$\boxed{\text{Le noyau de } u^k \text{ est Vect}(e_1,...,e_k)}$$

4. Tout d'abord, on montre sans trop de mal que $(\mathrm{Id}_E,u,...,u^{n-1})$ est une famille libre de Pol$(u)$... Pour le caractère générateur, on fixe $v\in$Pol$(u)$ il existe alors $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $v=P(u)$. On divise euclidiennement : il existe $Q,R\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P=X^nQ+R$, avec $R$ de degré strictement plus petit que $n$. On a alors

$$v=P(u)=u^n\circ Q(u)+R(u)=R(u)\in\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E,u,...,u^{n-1}),$$

   ce qui prouve le caractère générateur.

$$\boxed{(\mathrm{Id}_E,u,...,u^{n-1}) \text{ est une base de Pol}(u).}$$

1. Pour reprendre le terme de l'énoncé. Mais usuellement on parle d'application canoniquement associée lorsque l'espace en jeu est $\mathbb{K}^n$ ; passons...

5. C'est presque une question de cours... Fixons donc $x \in \mathrm{Ker}\,(P(u))$ et montrons que $w(x) \in \mathrm{Ker}\,(P(u))$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $w$ commute avec $u^k$ (récurrence immédiate), puis $w$ commute avec $P(u)$. On a alors :
$$P(u)\,(w(x)) = (P(u) \circ w)\,(x) = (w \circ P(u))\,(x) = w\,(P(u)(x)) = w(0) = 0.$$
$$\boxed{\text{Le noyau de } P(u) \text{ est stable par } w.}$$

6. D'après les questions 3 et 5, les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$ sont stables par $w$. Si $j \in [\![1, n]\!]$, alors $w(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_j)$ : cela se traduit sur la matrice $W = \mathrm{Mat}(w, \mathcal{B})$ par $W_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$ : c'est ce qu'on voulait montrer.
$$\boxed{\text{La matrice de } w \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est triangulaire supérieure}}$$

7. Tout d'abord, $u$ commute avec chaque $u^k$ donc avec tout polynôme en $u$, donc : $\mathrm{Pol}(u) \subset \mathrm{Com}(u)$.
Réciproquement, soit $w \in \mathrm{Com}(u)$. Sa matrice $W$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure et commute avec $N$. Or $(WN)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ w_{i,j+1} & \text{sinon} \end{cases}$ alors que $(NW)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = n \\ w_{i+1,j} & \text{sinon} \end{cases}$
On en déduit que pour $i \leqslant n-1$ et $j \geqslant 2$, $w_{i,j+1} = w_{i+1,j}$, ou encore : pour tout $\alpha, \beta \leqslant n-2$, $w_{\alpha,\beta} = w_{\alpha+1,\beta+1}$. La matrice $W$ est donc de la forme
$$W = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_1 \\ (0) & & & \alpha_0 \end{pmatrix}$$
En prenant $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$, on a alors $W = P(N)$, donc $w = P(u) \in \mathrm{Pol}(u)$, et donc $\mathrm{Com}(u) \subset \mathrm{Pol}(u)$. Comme on connaît une base de ce dernier, la dimension ne fait guère mystère.
$$\boxed{\mathrm{Com}(u) = \mathrm{Pol}(u) \text{ est de dimension } n.}$$

8. Pour des raisons de lisibilité, notons plutôt $v = u'$ ce nilpotent d'indice $n-1$.
*Si on a bien en tête les résultats un peu fins sur les noyaux/images itérés, on sait que le noyau de $v$ est de dimension 2 (la suite des dimensions des noyaux de $v^k$ est concave : si $\mathrm{Ker}(v)$ était de dimension 1, alors $\mathrm{Ker}(v^{n-1})$ serait au plus de dimension $n-1$, ce qui est absurde). Il resterait alors à construire une base de $\mathrm{Ker}(v^{n-2})$ de la façon usuelle (qui va suivre) et compléter avec un vecteur du noyau non colinéaire avec celui dont on dispose déjà...*
Mais ce résultat n'étant peut-être pas considéré comme basique (...), on va procéder autrement, en commençant par fixer $x_0$ tel que $v^{n-2}(x_0) \neq 0$. La famille $\big(x_0, ..., v^{n-2}(x_0)\big)$ est alors libre (enfin, il me semble...). On définit alors $e'_k = v^{n-1-k}(x_0)$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, et on complète la famille libre $(e'_1, ..., e'_n)$ en une base de $E$ à l'aide d'un vecteur $f$. La matrice de $v$ dans cette base est alors $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & \alpha_{n-2} \\ (0) & & & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ Comme $v$ n'a que 0 comme valeur propre, on a $\alpha_n = 0$. Ensuite, $u^{n-1}(f) = u^{n-2}\,(u(f)) = \alpha_{n-1} e'_1 = 0$, donc $\alpha_{n-1} = 0$.
Prenons maintenant $e'_n = f - \big(\alpha_1 e'_2 + \cdots + \alpha_{n-2} e'_{n-1}\big)$, de sorte que $e'_n \in \mathrm{Ker}(v)$ : la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ est alors une base de $E$ (on a seulement transvecté sur une base !), et :
$$\boxed{\text{La matrice de } u' \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est celle demandée.}}$$

9. Bien entendu, il y a un isomorphisme entre l'espace des endomorphismes commutant avec $u'$ est l'espace des matrices commutant avec $N'$ : c'est ce dernier espace qu'on va déterminer. En raisonnant par bloc, on voit que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ L & \alpha \end{pmatrix}$ (avec $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $C$ une matrice colonne et

$L$ une matrice ligne) commute avec $N' = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $AN_0 = N_0A$, $NC = 0$ et $LN = 0$. La première condition impose la forme de $A$ (question 7) ; la seconde impose $C = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, et la dernière impose $L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu \end{pmatrix}$. Ces conditions nécessaires sont également suffisantes pour avoir $MN' = N'M$. Les matrices commutant avec $N'$ sont donc celles de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda \\ & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ & (0) & \ddots & \lambda_1 & \vdots \\ & & & \lambda_0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu & \alpha \end{pmatrix}$$

et finalement :

$$\boxed{\mathrm{Com}(u') \text{ est de dimension } (n-1)+3 = n+2}$$

**Partie IV.**

1. Pas besoin d'aller chercher bien loin :

$$\boxed{\text{Les matrices } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont nilpotentes, mais pas leur somme } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Pour le produit, ce n'est guère plus compliqué :

$$\boxed{\text{Les matrices } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont nilpotentes, mais pas leur produit } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. (a) Notons $p = \alpha(A)$, $q = \alpha(B)$, et supposons : $p \leqslant q$. On a alors : $(AB)^p = (AB)(AB)...(AB) = A^pB^p$ (car $A$ et $B$ commutent), or $A^p = 0$, donc $(AB)^p = 0$, et ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } AB \text{ est nilpotente d'indice majoré par } p = \min(\alpha(A), \alpha(B))}$$

Formellement, la matrice nulle est nilpotente d'indice 1, et donc :

$$\boxed{\text{En prenant } A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } \alpha(A) = \alpha(B) = 2 \text{ et } \alpha(AB) = 1 < \min\left(\alpha(A), \alpha(B)\right)}$$

(b) Notons $p = \alpha(A)$ et $q = \alpha(B)$. Puisque $A$ et $B$ commutent, on peut binômiser :

$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q+1}{k} A^k B^{p+q-1-k}.$$

Si $k \geqslant p$ alors $A^k = 0$. Pour $k \leqslant p-1$, on a cette fois $p+q-1-k \geqslant q$ donc $B^{p+q-1-k} = 0$. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls, donc $(A+B)^{p+q-1} = 0$, donc :

$$\boxed{A+B \text{ est nilpotente d'ordre majoré par } \alpha(A) + \alpha(B) - 1}$$

Si on prend $A = B = 0$, on a bien $A$ et $B$ nilpotentes qui commutent, avec la somme nilpotente d'ordre $1 = 1 + 1 - 1$.

3. (a) Pour tout $k \geqslant r$, $A^k = 0$, donc dans les deux définitions « séries » de $\exp(A)$ et $\ln(I_n + A)$, les termes au delà de $k = r$ sont nuls :

$$\boxed{\text{En prenant } P = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{X^k}{k!} \text{ et } Q = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k, \text{ on a } \exp(A) = P(A) \text{ et } \ln(I_n + A) = Q(A)}$$

*On note pour la suite que $d = r - 1$.*

(b) On reconnaît les développements limités des fonctions exponentielle et logarithme aux voisinages de 0 et 1 : $\mathrm{e}^t = P(t) + o(t^d)$ et $\ln(1+u) = Q(u) + o(u^d)$. On va les composer...
— D'une part, $\mathrm{e}^{\ln(1+u)} = 1 + u$ ;
— d'autre part, $\ln(1+u) \sim u \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\ln(1+u)} &= P\left(\ln(1+u)\right) + o\left(\ln(1+u)^d\right) = P\left(Q(u) + o(u^d)\right) + o(u^d) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(Q(u) + o(u^d)\right)^k}_{Q(u)^k + o(u^d)} = P\left(Q(u)\right) + o(u^d) \end{aligned}$$

On a donc comme annoncé :

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, } P\left(Q(u)\right) = 1 + u + o(u^d)}$$

La seconde relation se prouve de la même façon.

4. Lorsqu'un polynôme $R$ vérifie $R(t) = o(X^d)$ au voisinage de 0, alors sa valuation vaut au moins $d+1$ ; il existe un polynôme $R_1$ tel que $R = X^{d+1}R_1$. Avec les notations de la question précédente, on a donc : $\exp(\ln(I_n + A)) = P(Q(A)) = I_n + A + A^r R_1(A)$, avec $R_1 \in \mathbb{R}[X]$. Mais comme $A^r = 0$, on obtient $\exp(\ln(I_n + A)) = I_n + A$. Ainsi, lorsque $U$ est unipotente, $\exp\left(\ln(U)\right) = U$, donc $\exp \circ \ln = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$ (avec $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices unipotentes).
De même, $\ln \circ \exp = \mathrm{Id}_{\mathcal{N}}$, avec $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes.

$$\boxed{\text{Les fonctions ln et exp induisent donc deux bijections réciproques entre } \mathcal{U} \text{ et } \mathcal{N}.}$$

*Au fait : sauriez-vous encore (...) montrer que si $f$ et $g$ sont des applications de $E$ (respectivement $F$) dans $F$ (respectivement $E$) vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors $f$ et $g$ sont bijectives (injective et surjectives) ?*

5. On peut invoquer un résultat général bien connu sur les exponentielles de matrices qui commutent... mais l'esprit de l'énoncé me semble être de le reprouver. Soient donc $A$ et $B$ deux matrices qui commutent. Dans le produit $\exp(A)\exp(B)$, on va regrouper les termes $A^iB^j$ à somme $s = i + j$ constante :

$$\exp(A)\exp(B) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{B^j}{j!}\right) = \sum_{s=0}^{2n-2} \underbrace{\sum_{i=0}^{s} \frac{A^i}{i!}\frac{B^{s-i}}{(s-i)!}}_{\frac{1}{s!}\sum\limits_{i=0}^{s}\binom{s}{i}A^iB^{s-i}} = \sum_{s=0}^{2n-2} \frac{1}{s!}(A+B)^s = \exp(A+B)$$

(on a binômisé, ce qui était licite puisque $A$ et $B$ commutent).

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices nilpotentes qui commutent, alors } \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)}$$

6. Supposons que $U$ et $V$ commutent. Les matrices $\ln(U)$ et $\ln(V)$ commutent alors également, puisque ce sont des polynômes en $U$ et $V$. On peut alors utiliser ce qui précède :

$$\exp\left(\ln(U) + \ln(V)\right) = \exp\left(\ln(U)\right)\exp\left(\ln(V)\right) = UV = \exp\left(\ln(UV)\right),$$

donc *par injectivité* de la fonctions exp, on en déduit :

$$\boxed{\text{Si } U \text{ et } V \text{ sont deux matrices unipotentes qui commutent, alors } \ln(UV) = \ln(U) + \ln(V)}$$

7. C'est dans le cours, entre les séries, la réduction et la topologie ! Si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme, alors la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente, ce qui permet de définir l'exponentielle de toute matrice réelle (ou complexe, d'ailleurs). En travaillant dans l'esprit de la question 5 (en contrôlant les restes : il ne s'agit plus de polynômes), on prouve de même que si $A$ et $B$ sont deux matrices qui commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
*Si $\|A\| < 1$, la série définissant $\ln(I + A)$ est également convergente. Comme on peut raisonnablement l'espérer,* exp *et* ln *sont alors* ***localement*** *des bijections réciproques.*