Nilpotents, commutants, exponentielle et logarithme de matrices

À travailler et rédiger en binôme pour le mardi 14 novembre 2023

Dans tout le problème, le corps des scalaires est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n désigne un entier naturel.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E (c'est-à-dire des applications linéaires de E dans E).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

— On note Id_E l'identité de E. On rappelle que $u^0 = \mathrm{Id}_E$, que $u^1 = u$, que $u^2 = u \circ u$, etc.
— On dit que u est nilpotent s'il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$.
On définit alors son indice (de nilpotence) par

$$\alpha(u) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid u^k = 0\right\};$$

on a donc $\alpha(u) \geqslant 1$.
— Soit F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Étant donné un entier naturel p non nul, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre p. On note I_p la matrice identité.
On définit de même que ci-dessus la notion de matrice nilpotente et l'indice d'une matrice nilpotente.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels à une indéterminée.
Dans la suite, le mot *polynôme* désignera toujours un élément de $\mathbb{R}[X]$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leqslant n\}.$$

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
On note $\mathcal{C} = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}_n = \left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I.

Soient $\Delta \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$ et $D \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.
3. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ. Expliciter la matrice de Δ_n relativement à la base $\mathcal{C}_n$.
4. L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable ?
5. L'endomorphisme Δ_n est-il nilpotent ?
6. L'endomorphisme Δ est-il nilpotent ?
7. Donner sans démonstration les résultats analogues pour D.

Partie II.

1. On note A et B les matrices respectives de D_2 et Δ_2 dans la base canonique $\mathcal{C}_2 = \left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, expliciter A^k et B^k.

2. On considère la matrice $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On note (E_1) l'équation matricielle $M^2 = J_1$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Exhiber deux solutions distinctes de (E_1).

3. Soit M une solution de (E_1). On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à M. Soit $g = f \circ f$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.
   (b) Montrer que f admet une unique valeur propre, que l'on précisera.
   (c) En déduire toutes les solutions de (E_1).

4. On considère la matrice $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On note (E_2) l'équation matricielle $M^2 = J_2$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que (E_2) n'admet aucune solution.

Partie III.

Dans cette partie E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 3$.
Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, on note

$$\operatorname{Com}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Pol}(f) = \{P(f) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n.
Soit $u' \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $n-1$.

1. Montrer que $\operatorname{Pol}(f)$ et $\operatorname{Com}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$. Est-ce que ce sont des sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $\begin{cases} n_{i,j} = 1 \text{ si } j = i+1, \\ n_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$
3. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, donner une base de $\operatorname{Ker} u^k$.
4. Montrer que $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de $\operatorname{Pol}(u)$.
5. Soit $w \in \operatorname{Com}(u)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\operatorname{Ker} P(u)$ est stable par w.
6. Montrer que la matrice de w dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.
7. Montrer que $\operatorname{Com}(u) = \operatorname{Pol}(u)$. En déduire la dimension de $\operatorname{Com}(u)$.
8. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E telle que la matrice de u' dans $\mathcal{B}'$ soit $N' = \left(n'_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $\begin{cases} n'_{i,j} = 1 \text{ si } j = i+1 \text{ et } j \leqslant n-1 \\ n'_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$
9. Déterminer la dimension de $\operatorname{Com}(u')$.

Partie IV.

Toutes les matrices étudiées dans cette partie sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.
Une matrice U est dite unipotente si $U - I_n$ est nilpotente.
Si A est une matrice nilpotente on note :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \tag{1}$$

$$\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k. \tag{2}$$

1. Exhiber deux matrices nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente.
   Même question pour le produit.
2. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent (c'est-à-dire telles que $AB = BA$).
   (a) Montrer que AB est nilpotente et que $\alpha(AB) \leqslant \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.
   Donner un exemple où cette inégalité est stricte.
   (b) Montrer que $A + B$ est nilpotente et que $\alpha(A + B) \leqslant \alpha(A) + \alpha(B) - 1$.
   Donner un exemple où cette inégalité est en fait une égalité.
3. Soit A une matrice nilpotente d'indice $r \geqslant 2$.
   (a) Montrer qu'il existe deux polynômes P et Q de même degré d (qu'on exprimera en fonction de r) tels que $\exp(A) = P(A)$ et $\ln(I_n + A) = Q(A)$.
   (b) Montrer que pour x réel tendant vers 0,
$$Q\left(P(x) - 1\right) = x + o\left(x^d\right), \qquad \text{et} \qquad P\left(Q(x)\right) = 1 + x + o\left(x^d\right).$$
4. Montrer que les relations (1) et (2) permettent de définir deux applications bijectives et réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes.
5. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent ; exprimer $\exp(A + B)$ en fonction de $\exp(A)$ et $\exp(B)$.
6. Soient U et V deux matrices unipotentes qui commutent ; exprimer $\ln(UV)$ en fonction de $\ln(U)$ et $\ln(V)$.
7. Sur quel sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il possible de définir l'exponentielle d'une matrice par la relation (1) ? Dans ce cadre plus général, que dire de $\exp(M_1 + M_2)$, $\exp(M_1)$ et $\exp(M_2)$ si M_1 et M_2 commutent ?