1 Une série de fonctions

1. Si on fixe $A > 0$ et qu'on note $f_n(x)$ ce qu'on imagine, alors $\|f_n\|_{\infty,[-A,A]} \leqslant \dfrac{A}{n^2}$ donc il y a convergence normale de $\sum f_n$ sur $[-A, A]$, ce qui donne pour le même prix (les f_n étant bien entendu continues) :

$$\boxed{\text{la convergence de la série et la continuité de la somme sur } \mathbb{R}.}$$

Il n'y a pas convergence normale ni même uniforme sur $\mathbb{R}$: regarder $f_n(n)$.

2. Après avoir calculé $f_n'(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$ et $f_n''(x) = \dfrac{2x^3 - 6n^2x}{(x^2+n^2)^3}$ on pourrait montrer :

$$\boxed{\text{Pour tout } p \geqslant 1, \text{ il existe } P_p, Q_p \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que pour tout } x \in \mathbb{R},\ f^{(p)}(x) = \frac{n^2 P_p(x) + Q_p(x)}{(x^2+n^2)^{p+1}}\cdot}$$

La preuve se fait par récurrence assez aisée ; la difficulté est d'exprimer soi-même la tronche de $f_n^{(p)}(x)$...

On obtient alors facilement :

$$\left\|f_n^{(p)}\right\|_{\infty,[-A,A]} \leqslant \frac{n^2 \|P_p\|_{\infty,[-A,A]} + \|Q_p\|_{\infty,[-A,A]}}{n^{2(p+1)}} = O(1/n^{2p}) = O(1/n^2),$$

assurant la convergence normale de $\sum_n f_n^{(p)}$ sur chaque $[-A, A]$, et ainsi (détails laissés au lecteur) :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3. À n fixé, on a $\dfrac{f_n(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{n^2}$ quand x tend vers 0, et on a alors sans problème (majoration de la différence, ou double-limite par convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$) :

$$\frac{F(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \left(= \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi^2}{6} x}$$

Ensuite, toujours à n fixé, on a $f_n(x) \sim \dfrac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. La série $\sum \frac{1}{x}$ étant divergente, on évalue alors plutôt $F(x)$ par une comparaison somme/intégrale, qui donne :

$$\boxed{F(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \frac{\pi}{2}\cdot}$$

Ce qu'on peut évidemment transformer en équivalent... mais l'énoncé ne voulait pas donner d'indication trop forte !

2 Quelques rayons de convergence

1. Une comparaison somme/intégrale banale fournit : $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^{999} \sim \dfrac{n^{1000}}{1000}$ donc pour $r \geqslant 0$ on a $(a_n r^n)$ bornée si et seulement si $r < 1$.

$$\boxed{RCV\left(\sum_n \left(\sum_{k=1}^{n} k^{999}\right) z^n\right) = 1}$$

2. Fixons $r \geqslant 0$ et notons $b_n = \left(\int_0^1 (1+t^2)^n dt\right) r^n = \int_0^1 \left(r(1+t^2)\right)^n dt$. On note que $t \mapsto (1+t^2)r$ est à valeurs positives et prend sur $[0,1]$ un maximum qui vaut $2r$. Ainsi :
— si $r < 1/2$ alors $0 \leqslant b_n \leqslant (2r)^n \leqslant 1$ donc (b_n) est bornée ;
— si $r > 1/2$ alors il existe α tel que $t \mapsto (1+t^2)r$ est > 1 sur $[\alpha, 1]$ donc (après découpage de l'intégrale en jetant à la poubelle le début, qui est positif) : $b_n \geqslant (1-\alpha)\left(\underbrace{(1+\alpha^2)r}_{>1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc (b_n) n'est pas bornée.

$$\boxed{RCV\left(\left(\int_0^1 (1+t^2)^n dt\right) z^n\right) = 1/2}$$

3. Puisque l'énoncé nous autorise/invite à d'Alembertiser, laissons-nous tenter... En notant $a_n = \binom{999n}{n}$ on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{(999n+999)!}{(999n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(998n)!}{(998n+998)!}\cdot$$

Si on a en tête que $\dfrac{15!}{12!} = 15\times 14\times 13$ d'une part, et que d'autre part $(n+600)(n+599)(n+598) \sim n^3$ alors on obtient facilement : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \sim \dfrac{999^{999}}{998^{998}}$, puis :

$$\boxed{RCV\left(\binom{999n}{n} z^n\right) = \frac{998^{998}}{999^{999}}\cdot}$$

Bonus : ça vaut quoi, à peu près, ce machin ?

3 D'après CCP 2011 – TSI 1

1. Pour chacune des trois séries $\sum u_n x^n$, on a $(u_n r^n)_n$ bornée pour $r \in [0,1[$ (car convergente vers 0) et non bornée pour $r > 1$ (car tendant vers $+\infty$), donc par définition du rayon de convergence (borne supérieure des ...) :

$$\boxed{\text{Les trois séries entières ont un rayon de convergence égal à 1.}}$$

2. Pour $|x| < 1$, $f(x)$ est la somme d'une série géométrique (attention, de premier terme x, et non 1) de raison de module strictement plus petit que 1, donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \frac{x}{1-x}\cdot}$$

Le cours nous assure que sur $]-R, R[$, la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et qu'on peut dériver sous le signe somme sur $]-R,R[$. Ce résultat appliqué à f, on retrouve alors ici (à un facteur x près) l'expression de $h(x)$, donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad h(x) = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\cdot}$$

3. (a) Pour les mêmes raisons que celles évoquées plus haut, on a g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, avec (pour $|x|<1$) : $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{3/2}x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^{3/2}x^{n-1}$ donc pour $x \in [0,1[$, $g'(x) \geqslant 1 > 0$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement croissante sur } [0,1[.}$$

On pouvait aussi noter que g est une somme (au sens des séries) de fonctions strictement croissante.

(b) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $x^n \leqslant \sqrt{n}x^n$, donc en sommant les séries (convergentes...) associées, on trouve :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, \qquad f(x) \leqslant g(x).}$$

Puisque $f(x) = \frac{x}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit :

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(c) La fonction g est strictement croissante, continue, égale à 0 en 0, tend vers $+\infty$ en 1^-, ce qui donne déjà une bonne idée de son graphe. Si en plus on dit que $g(x) \sim x$ au voisinage de 0 (ben oui : $g(x) = x + o(x)$; pourquoi ?) et que $g'' \geqslant 0$ (d'où la convexité), on obtient un graphe assez précis, même sans calculatrice. Bon, ici j'ai représenté le graphe de l'application $\widetilde{g} : x \mapsto \sum_{n=1}^{100} \sqrt{n}x^n$, qui est une assez bonne approximation de g...

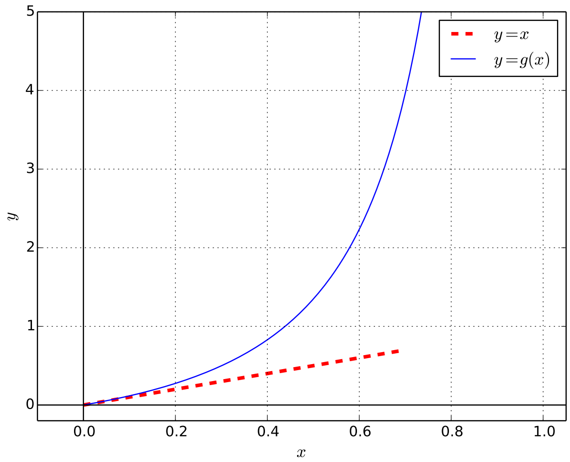

FIGURE 1 – Graphe (d'une approximation) de g

Pour la position du graphe par rapport à sa tangente en l'origine, on peut noter :

$$g(x) = x + \sum_{k=2}^{+\infty} \sqrt{k}x^k \geqslant x$$

4. (a) L'application g est **continue, strictement croissante**, avec $g(0)=0$ et $g(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$, donc **réalise une bijection** de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$. Puisque $2 \in [0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{Il existe un unique } \alpha \in [0,1[\text{ tel que } g(\alpha) = 2.}$$

(b) Déjà :

$$\boxed{h(1/2) = \frac{1/2}{1/4} = 2}$$

Mais $g(1/2) \leqslant h(1/2)$, donc :

$$g(1/2) \leqslant 2 = g(\alpha)$$

donc par **stricte croissance** de g :

$$\boxed{1/2 \leqslant \alpha}$$

Attention, si φ est seulement croissante (pas strictement) et $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$, on ne peut pas en déduire que $x \leqslant y$.

(c) Voici mon code :

```
def g(x, N):
    return sum(sqrt(k)*x**k for k in range(1, N+1))

n0 = 1
while g(0.6, n0) <2:
    n0 = n0+1
```

Après exécution, j'obtiens dans la console :

```
>>> n0
6
```

Bien entendu, chacune des sommes partielles minore $g(0,6)$; on a donc $g(0,6) \geqslant 2 = g(\alpha)$, et ainsi (toujours avec la stricte croissance de g) :

$$\boxed{\alpha \leqslant 0,6}$$

On a évidemment, à moindre frais, l'encadrement strict $0,5 < \alpha < 0,6$. *Le graphe vu plus haut le confirme.*

(d) Voir plus haut.

5. (a) Fixons $x \in]-1,1[$. **Toutes les séries en jeu étant convergentes**, on peut écrire (en cassant, décalant puis recomposant et en faisant attention au terme ajouté) :

$$\begin{aligned}
(1-x)g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{k}x^{k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n + \sqrt{1-1}x^1
\end{aligned}$$

Soit comme demandé :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad (1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n.}$$

En cas d'états d'âme, on peut bien entendu passer par des sommes partielles, mais observez bien la rédaction que j'ai proposée : elle est tout à fait satisfaisante et rigoureuse !

(b) Notons, pour $n \geqslant 1$: $u_n = (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.

i. la série $\sum u_n$ est alternée ;

ii. la valeur absolue de son terme général $|u_n| = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ tend vers 0 en décroissant.

Le théorème spécial sur les séries alternées s'applique donc :

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \text{ est convergente.}}$$

Sans voir le $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, formule pour laquelle vous connaissez mon amour modéré, on obtient facilement la convergence vers 0 *de (u_n) par un développement limité de $(1-1/n)^{1/2}$ donnant l'équivalent $|u_n| \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par contre pour la décroissance, il faut un peu plus se battre, avec un développement à l'ordre* 2 *(ou un argument – hors programme mais qui serait à mon avis accepté – de concavité de $x \mapsto \sqrt{x}$).*

(c) Puisque $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ (voir la remarque précédente, mais on peut aussi repartir de la formule avec la quantité conjuguée), on obtient la divergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ en comparant des séries à termes positifs, et ainsi :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$

Ceci nous prouve que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n$ est majoré par 1 (sur $]-R,R[$, la série converge absolument d'après le cours). Mais par ailleurs, la suite de terme général $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})1^n$ est convergente donc bornée, donc $R\geqslant 1$ (on revient toujours à la définition du rayon de convergence). Ainsi :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum_{n\geqslant 1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n \text{ vaut 1.}}$$

(d) On va travailler sur $I=[-1,0]$ et montrer que sur cet intervalle on a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n$, ce qui permettra d'appliquer le théorème de la double limite.

Notons $f_n : x\in[-1,0]\mapsto(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n$. À $x\in I$ fixé, on peut appliquer le théorème spécial sur les séries alternées, qui nous assure que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est convergente (on le savait !) mais surtout, le reste $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})x^k$ vérifie $|R_n(x)|\leqslant(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\,|x|^{n+1}\leqslant\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, et donc (ceci étant valable pour tout $x\in I$: $\|R_n\|_\infty\leqslant\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Ce majorant tendant vers 0, on a donc bien prouvé :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ est } \textbf{uniformément} \text{ convergente sur } [-1,0].}$$

Maintenant, pour tout $n\geqslant 1$, on a $f_n(x)\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; le **théorème de la double limite** nous dit donc, grâce à la convergence uniforme, que d'une part $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(-1)^n$ est convergente (certes ; on le savait déjà), mais aussi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(-1)^n$$

Si on note ℓ cette somme de série, on a donc $(1-x)g(x)\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}\ell$. Or $1-x\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}2$, donc :

$$\boxed{g(x)\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}\frac{\ell}{2}.}$$