À rendre le mardi 5 décembre 2023 dernier délai.

1 Une série de fonctions (40 minutes ?)

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Optionnel : montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Après avoir calculé les premières dérivées, on pourra estimer la forme de $f_n^{(k)}(x)$, avec f_n ce qu'on imagine.
3. Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

2 Quelques rayons de convergence (30 minutes ?)

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum\limits_n \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^{999}\right) z^n$ *(avec une comparaison somme-intégrale on devrait avoir une estimation assez fine du terme général) ;*
2. $\sum\limits_n \left(\displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n dt\right) z^n$ *(on ne cherchera pas à calculer l'intégrale, mais le comportemant de $a_n r^n$ risque de basculer selon que la fonction $t \mapsto (1+t^2)r$ reste ou non inférieure à 1 sur $[0,1]$) ;*
3. $\sum\limits_n \binom{999n}{n} z^n$ *(oui, vous pouvez...).*

3 D'après CCP 2011 – TSI 1 (1H20 ?)

1. Montrer que les trois séries entières $\sum x^n$, $\sum \sqrt{n} x^n$ et $\sum n x^n$ ont chacune un rayon de convergence égal à 1.
   On pose désormais :
   $$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^n, \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$$
   On aura noté que les trois sommes sont indexées à partir de $n = 1$.
2. Rappeler sans démonstration une expression simple de $f(x)$, pour $x \in]-1,1[$.
   En déduire *en citant précisément le théorème de cours utilisé* une expression simple de $h(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
3. (a) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $[0,1[$.
   (b) Minorer $g(x)$, pour $x \in [0,1[$; en déduire : $g(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.
   (c) Donner l'allure du graphe de g sur l'intervalle $[0,1[$; on précisera en particulier la tangente à l'origine, et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1[$ tel que $g(\alpha) = 2$.
   (b) Calculer $h(1/2)$; en déduire : $\alpha \geqslant 1/2$.
   (c) À l'aide de la calculatrice, déterminer explicitement le plus petit entier naturel n_0 tel que $\sum\limits_{n=1}^{n_0} \sqrt{n}(0,6)^n \geqslant 2$.
   Que peut-on en déduire pour α ?

(d) Écrire quelques lignes de Python qui permettraient de déterminer cet entier n_0.

5. (a) Montrer :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad (1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) x^n.$$

(b) Montrer que la série $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ est convergente.

(c) Montrer que la série $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ n'est pas convergente, et déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) x^n$.

(d) Montrer enfin que la fonction g possède une limite finie lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.
On citera précisément le théorème utilisé.