$\zeta(2)$ via Riemann-Lebesgue

Pour le lundi 18 décembre 2023

On va calculer ici $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ via le « lemme de Riemann-Lebesgue » (question 3.(a)) appliqué à une bonne fonction...

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(nt)dt$ et $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt$.

   (b) Heu... vous êtes sûr, au niveau des grandes parenthèses, des plus, des moins, et tout le bazar ?

   (c) Montrer qu'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}\cdot$$
   Donner leurs valeurs !
   Bien entendu, a et b ne doivent pas dépendre de n...

2. Pour $t \in [0,\pi]$, on note $S(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

   (a) Soit $t \in]0,\pi]$. Calculer $S(t)$ sous forme d'un produit/quotient de trois termes.

   (b) Linéariser $\sin\theta\cos\beta$.

   (c) En déduire une expression de la forme : $S(t) = -\dfrac{1}{2} + \cdots$

3. (a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{\lambda i t}dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (b) Supposons maintenant ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Que dire de $\displaystyle\int_a^b \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$ lorsque n tend vers $+\infty$?

4. Montrer que l'application $\varphi : t \in]0,\pi] \mapsto \dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{\frac{t}{2}}$ se prolonge en une fonction $\widetilde{\varphi}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

5. En considérant $\displaystyle\int_0^\pi (at^2+bt)S(t)dt$, déterminer la valeur de $\zeta(2)$.
   On pourra commencer par décomposer $(at^2+bt)S(t)$ à l'aide des calculs des questions 2 et 4 pour $t>0$, et constater que la relation s'étend à $[0,\pi]$.