1 Une trigonalisation

1. (a) Le spectre de v se lit directement sur la diagonale de la matrice triangulaire qui le représente dans la base $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\mathrm{Sp}(v) = \{-2, 3\}}$$

Pour les sceptiques : $\mathrm{Sp}(v)$ *est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique, qui se calcule directement dans la base* v *:* $\chi_v = (X+2)(X-3)^2$.

(b) Bien entendu si on sait lire une matrice, on note que $v(f_1) = -2f_1$ et $v(f_2) = 3f_3$, ce qui nous fournit directement des vecteurs propres. Par ailleurs,

$$\mathrm{rg}(v + 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 5 & \star \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

donc $\mathrm{Ker}\,(v + 2\mathrm{Id}_E)$ est de dimension $3 - 2 = 1$, donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(v + 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\,(f_1)}$$

Ensuite,

$$\mathrm{rg}(v - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -5 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— si $\beta \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(v - 3\mathrm{Id}_E) = 2$ donc $\mathrm{Ker}\,(v - 3\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1 et contient f_2 donc est égal à $\mathrm{Vect}(f_2)$;
— si $\beta = 0$, $\mathrm{rg}(v - 3\mathrm{Id}_E) = 1$, donc $\mathrm{Ker}\,(v - 3\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 2, contient f_2 ainsi que $\alpha f_1 + 5f_3$ (vous ne le voyez pas ? alors calculez !), vecteur non colinéaire à f_2.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(v - 3\mathrm{Id}_E) = \begin{cases} \mathrm{Vect}(f_2) & \text{si } \beta \neq 0 \\ \mathrm{Vect}(f_2, \alpha f_1 + 5f_3) & \text{si } \beta = 0 \end{cases}}$$

(c) Tout d'abord :

$$\mathrm{Mat}\left((v - 3\mathrm{Id})^2, \mathcal{F}\right) = \mathrm{Mat}\,(v - 3\mathrm{Id}, \mathcal{F})^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc directement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\left((v - 3\mathrm{Id})^2\right) = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)}$$

Si $\alpha \neq 0$*, on a encore* $\mathrm{Ker}\,\left((v - 3\mathrm{Id})^2\right)$ *de dimension* 2*, mais cette question était ici pour vous dire où chercher* f_3 *dans la synthèse : dans* $\mathrm{Ker}\,\left((v - 3\mathrm{Id})^2\right)$*, qui contient certes* f_2*... mais pas uniquement !*

2. (a) Bon, un petit coup de « calculatrice » ; Maple en ce qui me concerne :

```
> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[-8, -1, 13], [-7, 1, 11], [-6, -1, 11]]):
> CharacteristicPolynomial(A, X);
```

$$X^3 - 4X^2 - 3X + 18$$

```
> factor(%);
```

$$(X+2)(X-3)^2$$

Et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{-2, 3\}}$$

Les matrices $A+2I_3 =$ et $A-3I_3 =$ sont de rang au moins 2... et non inversibles (-2 et 3 sont valeurs propres), donc elles sont de rang 2, et les sous-espaces propres sont donc de dimension 1. Il reste à les calculer calmement (accessoirement, puisqu'on connaît la dimension, trouver UN vecteur propre est suffisant). Je me fais grâce du calcul, mais pas vous !

```
> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci signifie : « Comme valeurs propres, j'ai trouvé (première matrice) -2 et 3 (de multiplicité 2), et pour les vecteurs propres, j'ai trouvé (deuxième matrice) ... »

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_1) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_2) \text{ avec } f_1 = (2,1,1) \text{ et } f_2 = (1,2,1)}$$

Avec Python, on peut quand même tenter un calcul numérique :

```
from numpy import *
import numpy.linalg as lin

A = array([[-8, -1, 13], [-7, 1, 11], [-6, -1, 11]])

"""
>>> poly(A)
array([  1.,  -4.,  -3.,  18.])
>>> lin.eig(A)
(array([-2.        ,  3.00000005,  2.99999995]),
 array([[-0.81649658,  0.4082483 , -0.40824828],
        [-0.40824829,  0.81649657, -0.81649659],
        [-0.40824829,  0.4082483 , -0.40824828]]))
"""
```

L'interprétation est laissée au lecteur ; avec la bibliothèque `simpy`*, on aurait un calcul formel exact comme avec Maple.*

(b) Puisque $\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id}_E)$ est de dimension strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre 3 :

$$\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Ou encore : la somme des sous-espaces propres est de dimension 2*, donc n'est pas égale à* $\mathbb{R}^3$.

(c) Nous avons une famille (f_1, f_2) qui est un bon départ pour une base adaptée à u. Pour la compléter effectivement en une base, commençons par remarquer :

$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(f_1, 2f_2 - f_1)$$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc en prenant $f_3 = e_3 = (0,0,1)$, on aura bien $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ qui sera une base de $\mathbb{R}^3$, et puisque $u(f_1) = -2f_1$ et $u(f_2) = 3f_3$, la matrice de u dans la base $\mathcal{F}$ sera bien de la forme souhaitée. Via la formule de changement de base, en prenant P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$, on obtient donc :

$$\boxed{\text{Si } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \star \\ 0 & 3 & \star \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Pour calculer P^{-1} qui est la matrice de passage de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{E}$, il s'agit d'exprimer les e_i à l'aide des f_i. Ce n'est pas trop difficile pour $e_3 = f_3$; ensuite, puisque $f_1 = 2e_1 + e_2 + f_3$ et $f_2 = e_1 + 2e_2 + f_3$, on obtient facilement :

$$e_1 = \frac{1}{3}(2f_1 - f_2 - f_3) \qquad \text{et} \qquad e_2 = \frac{1}{3}(2f_2 - f_1 - f_3)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}}$$

```
>>> P = array([[2, 1, 0], [1, 2, 0], [1, 1, 1]])
>>> lin.inv(P)
array([[ 0.66666667, -0.33333333,  0.        ],
       [-0.33333333,  0.66666667,  0.        ],
       [-0.33333333, -0.33333333,  1.        ]])
>>> lin.inv(P) * A * P    # HAHAHAHAHAHAHAHAHA
array([[-10.66666667,   0.33333333,   0.        ],
       [  2.33333333,   1.33333333,   0.        ],
       [  2.        ,   0.33333333,  11.        ]])
>>> lin.inv(P).dot(A).dot(P)
array([[-2.,  0.,  5.],
       [ 0.,  3.,  3.],
       [ 0.,  0.,  3.]])
```

(d) L'analyse faite dans la première partie nous invite à prendre pour troisième vecteur de la nouvelle base un habitant de Ker $\left((u - 3\mathrm{Id}_E)^2\right)$ non colinéaire à f_2. Le calcul de $(A - 3I_3)^2$ va nous fournir quasiment gratuitement un tel vecteur, à savoir $e_1 + e_3 = (1, 0, 1)$:

```
>>> (A-3*identity(3)).dot(A-3*identity(3))
array([[ 50.,   0., -50.],
       [ 25.,   0., -25.],
       [ 25.,   0., -25.]])
>>> Q = array([[2, 1, 1], [1, 2, 0], [1, 1, 1]])
>>> lin.inv(Q).dot(A).dot(Q)
array([[ -2.00000000e+00,   0.00000000e+00,   0.00000000e+00],
       [  0.00000000e+00,   3.00000000e+00,   2.00000000e+00],
       [  0.00000000e+00,  -8.88178420e-16,   3.00000000e+00]])
```

$$\boxed{\text{En prenant } Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \star \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

On aurait aussi pu résoudre $u(f) = f_2 + 3f$, soit encore $(A - 3I_3)X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$...

2 Une série de fonctions

1. — Si $x \leqslant 0$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ tend vers 1 ou $+\infty$, mais pas 0 : il y a divergence grossière de $\sum f_n(x)$.
   — Si par contre $x > 0$ alors $\dfrac{f_n(x)}{1/n^2} = \exp\left(2\ln(n) - x\sqrt{n}\right) = \exp\left(-\sqrt{n}(x - 2\ln(n)/n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n(x) = o(1/n^2)$ donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum f_n(x)$ converge.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } F \text{ est }]0, +\infty[.}$$

2. Chaque f_n est continue, et on va montrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur chaque segment $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$.
Fixons donc un tel $I = [\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$. La décroissance de f_n nous assure que $\|f_n\|_{\infty,I} = f_n(\alpha)$. Or $\sum f_n(\alpha)$ converge, ce qui établit la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n$ sur $[\alpha,\beta]$.

$$\boxed{F \text{ est continue.}}$$

3. On dresse la check-list :
— Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $f_n'(x) = -\sqrt{n}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
— $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
— Puisque $\|f_n'\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = |f_n'(\alpha)|$ (toujours pas décroissance de $|f_n'| = \sqrt{n}f_n$), on a $\|f_n'\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = \sqrt{n}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{n}} = o(1/n^2)$ (pour la même raison que plus haut), ce qui nous donne la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n'$ sur chaque $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$.
Le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ se traite essentiellement de la même façon. On va juste consommer plus de papier/crayon... On fixe donc $p \geqslant 1$.
— Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^p$, avec $f_n^{(k)}(x) = (-\sqrt{n})^k\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ « pour tout tout ».
— $\sum f_n$, $\sum f_n'$, ... $\sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur $]0,+\infty[$.
— Si on fixe $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$ alors $\left\|f_n^{(p)}\right\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = \sqrt{n}^p\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{n}} = o(1/n^2)$, ce qui nous donne la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n^{(p)}$ sur chaque $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$.
Tout ceci établit le caractère $\mathcal{C}^p$ de F sur $]0,+\infty[$. Et comme on l'a fait pour tout $p \geqslant 1$:

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

4. — Au voisinage de $+\infty$: chaque f_n possède une limite finie (1 pour f_0 et 0 pour les autres) et $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1,+\infty[$ (yep : $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = o(1/n^2)$) donc le théorème de la double limite s'applique, nous fournissant la convergence de la série qu'on imagine (ce qui n'est pas un scoop), mais dit surtout :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{+\infty} f_n\right) = 1}$$

— Au voisinage de 0, on fixe $x_0 > 0$ et on réalise une comparaison série/intégrale pour estimer $F(x_0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g(n)$ avec $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-x_0\sqrt{t}}$.
L'essentiel est écrit (introduire la bonne fonction, ici clairement décroissante sur $[0,+\infty[$. Vous obtenez alors sans mal (après avoir fait un dessin avec les deux rectangles qui vont bien, of course) :

$$\int_0^{N+1} \mathrm{e}^{-x_0\sqrt{t}}dt \sum_{n=0}^{N} g(n) \leqslant 1 + \int_0^N \mathrm{e}^{-x_0\sqrt{t}}dt$$

Après le changement de variable [1] $u = x_0\sqrt{t}$ on constate alors que les deux membres extérieurs de l'encadrement possèdent une limite quand N tend vers $+\infty$, ainsi que le terme central. Il n'est évidemment (...) pas question de gendarmiser à ce moment puisque les limites sont différentes. Fort heureusement elles sont équivalentes quand x_0 (devenu x : on le libère) tend vers 0^+. On peut alors diviser tout le monde par cet équivalent commun pour gendarmiser :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}\cdot}$$

1. dont on masque pudiquement les détails...

3 D'après CCP 2014 – MP 1

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}.$$

Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0 \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 \end{aligned}$$

c'est à dire le résultat demandé :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n}$$

2. (a) La série $\sum (a_k - a_{k+1})$ est de même nature que la suite (a_n) (c'est du cours ! revenir à la définition de la convergence d'une série...). Comme les hypothèses nous assurent que (a_n) converge...

$$\boxed{\sum (a_k - a_{k+1}) \text{ est convergente.}}$$

(b) Il s'agit ici de montrer que la suite (S_n) est convergente. Puisque $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et (B_n) est bornée, on a déjà $a_n B_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et on est donc ramené à la convergence de la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$, ou encore de la série de terme général $u_k = (a_k - a_{k+1}) B_k$.
Si on note M un majorant de $(|B_n|)$, on a alors $|u_k| = |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leqslant M(a_k - a_{k+1})$. Or $\sum M(a_k - a_{k+1})$ est convergente (question précédente), donc par comparaison de **séries à termes positifs**, $\sum |u_k|$ est convergente.
Ainsi, $\sum u_k$ est absolument convergente donc convergente, ce qui était le dernier morceau du puzzle.

$$\boxed{\sum a_n b_n \text{ est convergente}}$$

Je sais déjà que je vais rencontrer beaucoup de majorations de sommes partielles pour prouver les convergences... Allez, des majorations de modules de sommes partielles pour les plus attentifs...

(c) Commençons par l'énoncé (qui ne parle pas du contrôle du reste) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ est alternée avec } (|u_n|) \text{ décroissante de limite nulle, alors } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Les hypothèses nous permettent d'écrire $u_n = (-1)^n |u_n|$ (ou $(-1)^{n+1} |u_n|$, mais on va traiter le premier cas). Prenons, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = |u_n|$ et $b_n = (-1)^n$. D'une part (a_n) est bien décroissante de limite nulle, et d'autre part on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc (B_n) est bornée, donc le résultat prouvé dans la question précédente s'applique, nous assurant que $\sum a_n b_n$, c'est-à-dire $\sum u_n$ est bien convergente.

$$\boxed{\text{c.q.f.d.}}$$

3. (a) Puisque $e^{i\theta} \neq 1$, il est question de sommer les termes d'une suite géométrique **de raison différente de** 1, ce qui ne pose normalement pas de problème [2]. Ensuite, on factorise via

2. Cette bonne blague...

l'angle moitié en haut et en bas pour voir apparaître des sinus (et NON, je ne ferai pas le pari que vous avez simplifié de tête les facteurs $-2i$ s'ils n'apparaissent pas sur votre copie...) :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)i\theta/2}(-2i)\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\mathrm{e}^{i\theta/2}(-2i)\sin\frac{\theta}{2}},$$

soit finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{ni\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

(b) On note bien entendu que $\left|\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}\cdot$ Déjà, si $\alpha \leqslant 0$, alors $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne converge pas vers 0, donc $\left(\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right)$ non plus, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Il y a un autre cas assez simple : si $\alpha > 1$, alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente, donc est convergente.

Supposons maintenant : $0 < \alpha \leqslant 1$. En prenant $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = \mathrm{e}^{ni\theta}$, on a (avec les notations de l'énoncé) :

$$|B_n| = \left|\mathrm{e}^{ni\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| = \frac{\left|\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

ce qui permet d'appliquer la question II.2.b (puisque évidemment (a_n) est décroissante de limite nulle) : $\sum a_n b_n = \sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ est } \begin{cases} \text{grossièrement divergente} & \text{si } \alpha \leqslant 0 \\ \text{semi-convergente} & \text{si } 0 < \alpha \leqslant 1 \\ \text{absolument convergente} & \text{si } 1 < \alpha \end{cases}}$$

4. La question précédente nous assure ($\alpha = 1/2$) la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{n}}$ donc de la série des parties imaginaires $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $u_n(x) = 0$, donc $\sum u_n(x)$ est également convergente.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

1. (a) Si on note $G_n = a_n F_n$, il vient immédiatement pour tout $z \in A$ (les a_n sont des réels positifs puisqu'ils décroissent vers 0) : $|G_n(z)| = a_n\,|F_n(z)| \leqslant a_n M$. Ceci étant valable pour tout $z \in A$, on a donc $\|G_n\|_\infty \leqslant a_n M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\|G_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis :

$$\boxed{(a_n F_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A}$$

Si on note cette fois $H_k = (a_k - a_{k+1})F_k$, alors $\|H_k\|_\infty = (a_k - a_{k+1})\,\|F_k\|_\infty$, et comme $(\|H_k\|_\infty)$ est convergente, elle est bornée, ce qui fournit une majoration de la forme $\|H_k\|_\infty \leqslant M(a_k - a_{k+1})$, et c'est gagné, car $\sum(a_k - a_{k+1})$ est convergente (toujours le même argument : (a_n) est une suite convergente). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|H_n\|_\infty$ est convergente.

$$\boxed{\sum(a_k - a_{k+1})F_k \text{ converge normalement sur } A.}$$

(b) Les calculs sont identiques à ceux de la question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n\, f_n$, on trouve :

$$\forall x \in A, \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})\, F_k(x) + a_n\, F_n(x)$$

puis :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})\, F_k + a_n\, F_n.$$

Or, d'après la question 5.a, la série $\sum (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement donc uniformément, donc la *suite* de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})\, F_k$ converge normalement donc uniformément, et celle de terme général $a_n\, F_n$ aussi, donc leur somme aussi. En d'autres termes [3] :

$$\boxed{\sum a_n f_n \text{ converge uniformément sur } A.}$$

2. (a) Une simple factorisation par l'arc moitié donne

$$\boxed{1 - \mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix/2}(\mathrm{e}^{-ix/2} - \mathrm{e}^{ix/2}) = -2i \sin \tfrac{x}{2}\, \mathrm{e}^{ix/2}}$$

(b) Fixons $a \in]0, \pi[$. Notons A l'intervalle $[a, 2\pi - a]$. Si l'on utilise les notations de la question 5, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in A$:

$$f_n(x) = \sin(nx), \qquad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Maintenant, on vérifie que :
— la suite (a_n) est décroissante et de limite nulle ;
— la suite (F_n) est uniformément bornée sur A :

$$\forall x \in A\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |F_n(x)| = \left| \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} \right| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} \right| = \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{1}{\sin(a/2)}.$$

D'après la question 5, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $A = [a, 2\pi - a]$.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ converge uniformément sur } [a, 2\pi - a].}$$

(Le fait que les sommes commencent à 1 et non à 0 n'a évidemment aucune incidence sur la validité de la transposition des raisonnements...)

(c) Puisque chaque fonction u_n est continue sur $]0, 2\pi[$, le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions montre que la somme U de la série $\sum a_n\, f_n$ est continue sur *chaque* $[a, 2\pi - a]$, donc continue sur $]0, 2\pi[$.

$$\boxed{U \text{ est continue sur }]0, 2\pi[.}$$

(d) Comme dans la question 5.c, il suffit de prouver que la suite (V_n) des sommes partielles de la série $\sum \sin(nx) \sin(px)$ est uniformément bornée, cette fois sur $[0, \pi]$. Or, d'après les calculs déjà faits, on a (attention, on traite à part le cas $x = 0$...)

$$\forall x \in]0, \pi]\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |V_n(x)| \leqslant \frac{|\sin px|}{\sin(x/2)}.$$

L'inégalité gentiment donnée par l'énoncé (et prouvée plus loin) montre que

$$\forall x \in]0, \pi]\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |V_n(x)| \leqslant \pi \frac{|\sin px|}{x} \leqslant p\pi,$$

en vertu d'une autre inégalité classique : $|\sin t| \leqslant |t|$ pour tout réel t.

3. Attention, on passe sans arrêt des suites aux séries et inversement...

Enfin, cette inégalité est également valable pour $x = 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|V_n\|_\infty \leqslant p\pi$$

c'est-à-dire que la suite (V_n) est uniformément bornée sur $[0, \pi]$.
On en déduit [4] que :

$$\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ converge uniformément sur } [0, \pi].}$$

Pour montrer l'inégalité donnée dans l'énoncé, on peut étudier la fonction différence $x \mapsto \sin \frac{x}{2} - \frac{x}{\pi}$, *qui s'avère être croissante puis décroissante...*

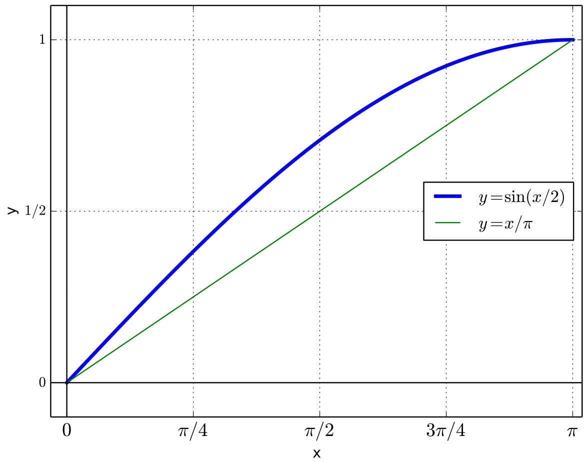


FIGURE 1 – Le graphe est situé dessus la corde

Fondamentalement, « la » bonne explication est la concavité de la fonction $x \mapsto \sin(x/2)$ *sur* $[0, \pi]$.

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

1. J'accepte bien entendu la version réelle :

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n x^n \text{ converge uniformément sur tout segment } [a, b] \subset] - R, R[}$$

Mais aussi la version complexe

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n z^n \text{ converge uniformément sur toute boule fermée } B_f(0, r) \subset B_o(0, R) \text{ (avec donc } r < R).}$$

2. (a) Soit $r > 0$. La suite $\left(\dfrac{r^n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$. En revenant à la définition du rayon de convergence, on obtient donc directement :

$$\boxed{\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}} \text{ a pour rayon de convergence } 1.}$$

(b) Procédons par l'absurde en supposant qu'il y a convergence uniforme sur $] - 1, 1[$. Puisque chaque $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque x tend vers 1^-, la convergence uniforme permet d'appliquer le théorème de la double limite :

— la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est convergente ;

— on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

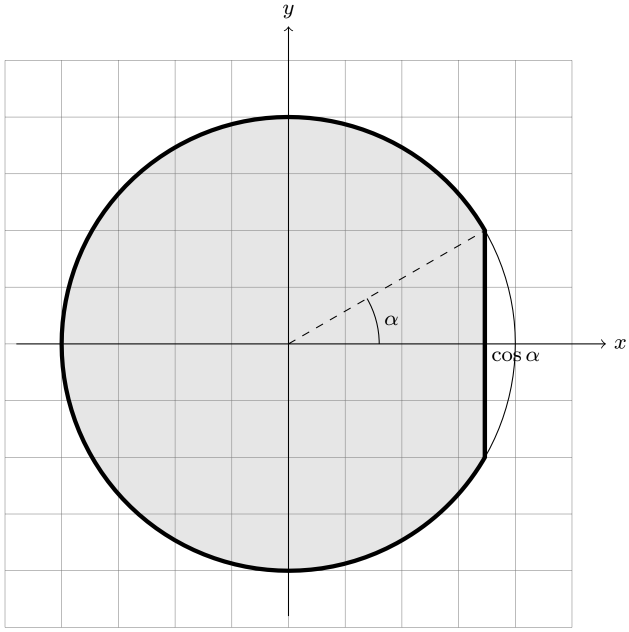
4. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ étant toujours décroissante de limite nulle !

Bien entendu, le premier point est déjà un peu problématique.

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{x^n}{\sqrt{n}} \text{ ne converge pas uniformément sur }]-1,1[.}$$

REMARQUE : En revanche, on montre classiquement que la convergence uniforme a lieu sur $[-1,0]$ par exemple, en contrôlant le reste d'une série alternée à l'aide de son premier terme.

(c) Merci à monsieur Appel pour le joli dessin.



(d) Soit $z \in D_\alpha$. Déjà, coup de chance, on est sûr que $z \neq 1$, ce qui permet de sommer une série géométrique :

$$|F_n(z)| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}.$$

Or $|1-z|^2 = (1-x)^2 + y^2 \geqslant (1-x)^2$. Mais $-1 \leqslant x \leqslant \cos\alpha$, donc $1-x \geqslant 1-\cos\alpha > 0$, donc $|1-z| \geqslant 1-\cos\alpha > 0$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } z \in D_\alpha, \text{ alors } |F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1-x} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

La suite (F_n) est donc uniformément bornée sur D_α.

(e) Le fait que (F_n) soit uniformément bornée sur D_α et que la suite de terme général $1/\sqrt{n}$ décroît et converge vers 0 montre (question 5) que :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{z^n}{\sqrt{n}} \text{ converge uniformément sur } D_\alpha, \text{ et ce pour tout } \alpha \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.}$$