Psi 999 – 2023/2024 ψ **DS 4 – 4 heures**

Le 9 décembre 2023 – calculatrices autorisées

Allez tout de suite jeter un coup d'œil à la dernière partie, en fin d'énoncé...

1 Une trigonalisation (1H10 ?)

On va dans cet exercice trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 13 \\ -7 & 1 & 11 \\ -6 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Seul le polynôme caractéristique de A pourra être calculé à l'aide de la calculatrice ; les autres calculs devront être explicités.

1. Analyse

   On suppose ici que v est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de E.

   (a) Que vaut $\mathrm{Sp}(v)$?

   (b) Déterminer les sous-espaces propres de v. *On pourra être amené à discuter...*

   (c) On suppose : $\alpha = 0$. Que vaut $\mathrm{Ker}\,(v - 3\mathrm{Id})^2$?

2. Synthèse

   Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ vaut A.

   (a) Déterminer le spectre de u, puis ses sous-espaces propres.

   (b) u est-il diagonalisable ?

   (c) Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \star \\ 0 & 3 & \star \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; calculer P^{-1}.

   (d) Expliciter $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \star \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *(le calcul de Q^{-1} n'est pas demandé ; bon, je vous accorde la calculatrice pour $(A - 3I_3)^2$...).*

2 Une série de fonctions (30 minutes ?)

On définit, quand c'est possible :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est continue.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^\infty$.
4. Étudier le comportement de F aux deux bords du domaine de définition.
   On donnera le comportement « avec un terme » (limite réelle non nulle, ou équivalent).

3 D'après CCP 2014 – MP 1 (2H20 ?)

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

En remarquant que, pour $k \geqslant 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Cette façon de réécrire S_n s'appelle la transformation d'Abel.

2. On suppose que (B_n) est bornée et que (a_n) est décroissante de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge.
   (b) En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.
   (c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème de convergence des séries alternées, ***après l'avoir énoncé***.
3. Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer pour n entier naturel, $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.
   (b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.
4. On s'intéresse à la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$) convergent.
On notera U sa fonction somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

1. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n, $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$.
On suppose que (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leqslant M$ (*la suite (F_n) est dite uniformément bornée*)
   (a) Démontrer que la suite de fonctions $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A.
   (b) À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.
2. Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \mathrm{e}^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}$.

(b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.

(c) En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

(d) On fixe $p \in \mathbb{N}$, et on considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}\cdot$

Démontrer que $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.

On pourra, par exemple, utiliser[1] *:*

$$\forall x \in [0, \pi], \qquad \frac{x}{\pi} \leqslant \sin\frac{x}{2}\cdot$$

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

1. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série de fonctions.
2. On considère la série de la variable complexe $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}\cdot$

(a) Justifier le fait que cette série entière a pour rayon de convergence 1.

(b) On note $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

Démontrer que la série de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$

(en particulier la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ *ne converge pas uniformément sur D).*

(c) Pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leqslant 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leqslant \cos\alpha$.

Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

On confondra évidemment un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.

(d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$.

Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathrm{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1-x} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha}\cdot$$

(e) Démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur toutes les parties D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

4 Un essai...

Voici quelques remarques/notes écrites plus ou moins rageusement lors de la correction de ces problèmes il y a quelques années...

Vais-je devoir les signaler à nouveau cette année ? Probablement pas puisque j'en parle dans l'énoncé !

Sourire nerveux...

4.1 Premier problème

— Soyez plus efficaces, sur ces situations génériques !

— Attention aux calculs...

— Que vous suggérait l'analyse ?

1. Une petite prime sera généreusement offerte à ceux justifiant cette inégalité, cette prime sera augmentée si la preuve est accompagnée d'un dessin pertinent...

4.2 Deuxième problème

- Mouais... il est clair ce « $o(...)$ » ?
- Hum, même pour $n = 0$?
- Sur $]0, +\infty[$, tu es sûr ?
- Pas de dessin ? Poubelle.
- Ton dessin ne met pas en évidence l'encadrement donné juste après ? Poubelle.

4.3 Troisième problème

- Majorations de complexes ! ! !
- $|S_n| \leqslant$ ... donc (S_n) est convergente...
- (nimpe) donc (S_n) est convergente...
- « passages à la limite » sans savoir qu'elles existent.
- Pitié, pas de récurrence.
- Savoir enfin sommer les suites géométriques...
- Que vaut $\mathrm{e}^{i\theta}$?
- Bravo pour l'uniforme convergence sur ...