CCS TSI MATHS2 2021

Rémi Crétois, Thierry de Rago, Michel Sortais

version du 26 avril 2021

I Commutant d'une matrice

I.A Propriétés générales

Q 1. — $I_n \in C_A$ car la matrice identité commute avec toute matrice, C_A est donc non vide.
— Soient M_1 et M_2 deux matrices de C_A et soit λ un réel, alors :

$$\begin{aligned}(\lambda M_1 + M_2)A &= \lambda M_1 A + M_2 A \\ &= \lambda A M_1 + A M_2 \text{ car } (M_1, M_2) \in C_A^2 \\ &= A(\lambda M_1 + M_2)\end{aligned}$$

Donc C_A est stable par combinaison linéaire.
En conclusion, C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 2. Soient M et N deux matrices de C_A, alors :

$$\begin{aligned}MNA = M(NA) &= MAN \text{ car } N \in C_A \\ &= (MA)N = AMN \text{ car } M \in C_A\end{aligned}$$

En conclusion, C_A est stable par produit matriciel.

Q 3. Pour $M \in C_A$ fixé, prouvons cette affirmation par récurrence sur l'entier $k \geqslant 0$.
• **Initialisation :** pour $k = 0$, on a $M^k = M^0 = I$ et donc $M^0 \in C_A$.
• **Hérédité :** soit $k \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On suppose que $M^k \in C_A$. Alors, d'après la question précédente, en posant $N = M^k$, on a $(M \times N) \in C_A$, soit $M \times N = M \times M^k = M^{k+1} \in C_A$.
• **Conclusion :** la propriété considérée étant vraie au rang 0 et héréditaire, on peut affirmer que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ M^k \in C_A}$.

Q 4. Soit $\Pi \in \mathbb{R}[X]$.
Tout d'abord, si Π est le polynôme nul, il est tout à fait évident que $\Pi(A)$ commute avec A puisque $\Pi(A)$ est, dans ce cas très particulier, la matrice nulle de même format que A.
Supposons dorénavant que Π n'est pas le polynôme nul; soit alors $d = d^o(\Pi)$ le degré du polynôme Π puis $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ ses coefficients, en sorte que : $\Pi(X) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$.
On a : $\Pi(A) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k$, la matrice $\Pi(A)$ est combinaison linéaire de puissances de A, d'après la question précédente $\Pi(A)$ est donc combinaison linéaire de matrices qui commutent avec A. Puisque C_A constitue un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $\boxed{\Pi(A) \in C_A}$.

Q 5. Puisque la matrice carrée P est inversible, on a pour tout couple $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$Y = X \iff YP = XP \iff P^{-1}YP = P^{-1}XP$$

Mais alors, pour une matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer que :

$$\begin{aligned}M \in C_A &\iff AM = MA \\ &\iff AMP = MAP \\ &\iff P^{-1}AMP = P^{-1}MAP \\ &\iff P^{-1}A(PP^{-1})MP = P^{-1}M(PP^{-1})AP \\ &\iff (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)(P^{-1})AP) \\ &\iff M' \in C_{A'}\end{aligned}$$

Q 6. Tout d'abord, d'après la question précédente : Φ est bien à valeurs dans $C_{A'}$ et Ψ à valeurs dans C_A.
Ensuite, pour $(M_1, M_2) \in C_A^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés, on obtient en appliquant les règles usuelles du calcul matriciel :

$$\Phi(\alpha M_1 + \beta M_2) = P^{-1}(\alpha M_1 + \beta M_2)P = (\alpha P^{-1} M_1 + \beta P^{-1} M_2)P = \alpha P^{-1} M_1 P + \beta P^{-1} M_2 P = \alpha\Phi(M_1) + \beta\Phi(M_2),$$

ce qui prouve que $\underline{\Phi \text{ est linéaire}}$.
On montre de la même façon que Ψ est elle aussi linéaire.

Q 7. L'associativité du produit matriciel permet d'affirmer que

$$\forall M \in C_{A'},\, \Phi \circ \Psi(M) = \Phi(PMP^{-1}) = P^{-1}(PMP^{-1})P = (P^{-1}P)M(P^{-1}P) = M,$$

en sorte que : $\boxed{\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{C_{A'}}}$.
On prouve de même que : $\boxed{\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{C_A}}$.

Q 8. D'après les deux questions précédentes, les applications $\Phi : C_A \longrightarrow C_{A'}$ et $\Psi : C_{A'} \longrightarrow C_A$ sont toutes deux linéaires et bijectives, telles que : $\Phi^{-1} = \Psi$, $\Psi^{-1} = \Phi$.
On peut donc affirmer que Φ et Ψ constituent des isomorphismes d'espaces vectoriels.

I.B Quelques exemples en dimension 3

I.B.1 Premier exemple

Q 9. • Recherche des valeurs propres de A :
Observons que le polynôme caractéristique χ_A est tel que

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R},\, \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} (\lambda+1) & 0 & -2 \\ 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 1 & -1 & (\lambda-2) \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)\,[(\lambda+1)(\lambda-2)+2] \\ &= (\lambda+1)\left[\lambda^2-\lambda\right] \\ &= \boxed{(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)}\end{aligned}$$

Le spectre de A est donc constitué des trois valeurs propres $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$.
Puisque la matrice A est carrée de format (3×3) et possède trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.
• Détermination des sous-espaces propres associés à chaque valeur propre de A :
⋄ Recherche de $E_{\lambda_1}(A)$:
Pour $\lambda_1 = -1$, on obtient en appliquant des opérations élémentaires aux lignes de $(A - \lambda_1 I) = (A + I)$:

$$(A - \lambda_1 I) = (A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en sorte que :

$$(A+I) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{E_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}\left[C^{(1)}\right]}$.

⋄ Recherche de $E_{\lambda_2}(A)$:
Pour $\lambda_2 = 0$, des calculs similaires montrent que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases},$$

en sorte que $\boxed{E_{\lambda_2}(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}\left[C^{(2)}\right]}$.

⋄ Recherche de $E_{\lambda_3}(A)$:
Enfin dans le cas de la valeur propre $\lambda_3 = 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases},$$

en sorte que $\boxed{E_{\lambda_3}(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}\left[C^{(3)}\right]}$.

• <u>Conclusion (diagonalisation explicite de A) :</u>
en conclusion, on peut donc affirmer que $A = P_1 D P_1^{-1}$ pour une matrice inversible P_1 et une matrice diagonale D données par

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Q 10. Soit $M' \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque multiplier M' <u>*à gauche*</u> par $D = \mathrm{diag}(-1;0;1)$ revient à multiplier la 1ère <u>*ligne*</u> de M' par -1 et la 2ème par 0 en laissant la 3ème inchangée, tandis que multiplier M' <u>*à droite*</u> par D revient à multiplier la 1ère <u>*colonne*</u> de M' par -1 et la 2ème par 0 en laissant la 3ème inchangée, on aura

$$DM' = M'D \Longleftrightarrow \begin{cases} -m_{1,2} = 0,\ -m_{1,3} = m_{1,3} \\ 0 = -m_{2,1},\ 0 = m_{2,3} \\ m_{3,1} = -m_{3,1},\ m_{3,2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m_{1,2} = m_{1,3} = 0 \\ m_{2,1} = m_{2,3} = 0 \\ m_{3,1} = m_{3,2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M' = \mathrm{diag}(a,b,c)}$$

Q 11. D'après la question précédente, C_D est de dimension 3 et la famille

$$\boxed{\mathscr{E}_D = \left(E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)}, E_{3,3}^{(3)}\right)}$$

forme une base de C_D.

Q 12. D'après la **Q.5**, l'application $\Psi : C_D \longrightarrow C_A$ définie par $\Psi(M') = P_1 M' P_1^{-1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dans ces conditions, on doit avoir $\dim(C_A) = \dim(C_D) = 3$, et en appliquant Ψ aux trois vecteurs de base de C_D on obtient une base de C_A.
Or, comme $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$P_1 E_{1,1}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_1}$$

et de même :

$$P_1 E_{2,2}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = Q_2},\ P_1 E_{3,3}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = Q_3}$$

En conclusion, C_A est de dimension 3 et la famille $\boxed{\mathscr{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)}$ forme une base de C_A.

I.B.2 Deuxième exemple

Q 13. Puisqu'elle est symétrique, la matrice carrée réelle B est diagonalisable (et même *orthogonalement* diagonalisable) dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Observons que le polynôme caractéristique χ_B est tel que

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} (\lambda-7) & -2 & 2 \\ -2 & (\lambda-4) & 1 \\ 2 & 1 & (\lambda-4) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (\lambda-7) & -2 & 2 \\ -2 & (\lambda-4) & 1 \\ 0 & (\lambda-3) & (\lambda-3) \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\left[(\lambda-7)(\lambda-4)-4-(\lambda-7)-4\right] \\
&= (\lambda-3)\left[\lambda^2-12\lambda+27\right] \\
&= \boxed{(\lambda-3)^2(\lambda-9)}
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont donc $\lambda_1=\lambda_2=3$ (double) ainsi que $\lambda_3=9$.
Identifions précisément le sous-espace propre associé à $\lambda_1=\lambda_2=3$; en appliquant des opérations élémentaires aux lignes de $(B-3I)$, on obtient :

$$(B-3I)=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi : $\boxed{E_3(B)=\operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]=\operatorname{Vect}\left[C^{(1)},C^{(2)}\right]}$.

Enfin, comme B est symétrique, $C^{(3)}=C^{(1)}\wedge C^{(2)}=\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ fournit assurément un vecteur propre de B associé à son autre valeur propre $\lambda_3=9$.
En conclusion, la matrice B se diagonalise explicitement sous la forme $B=P_2\Delta P_2^{(-1)}$, où

$$\boxed{P_2=\begin{pmatrix} C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

Q 14. Observons que pour $M'\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque, le produit $\Delta M'$ change la matrice M' en multipliant ses deux 1ères *lignes* par $\lambda_1=3$ et sa 3ème *ligne* par $\lambda_3=9$, tandis que le produit $M'\Delta$ change la matrice M' en multipliant ses deux 1ères *colonnes* par $\lambda_1=3$ et sa 3ème *colonne* par $\lambda_3=9$. Ainsi :

$$M'\in C_\Delta \iff \Delta M'=M'\Delta \iff \begin{cases} 3m_{1,3}=9m_{1,3} \\ 3m_{2,3}=9m_{2,3} \\ 9m_{3,1}=3m_{3,1} \\ 9m_{3,2}=3m_{3,2} \end{cases} \iff m_{1,3}=m_{2,3}=m_{3,1}=m_{3,2}=0$$

En conclusion, on a bien

$$\boxed{M'\in C_\Delta \iff \exists(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5,\ M'=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}}$$

Q 15. D'après la question précédente, la famille

$$\mathcal{E}_\Delta=\left(E^{(3)}_{1,1},E^{(3)}_{1,2},E^{(3)}_{2,1},E^{(3)}_{2,2},E^{(3)}_{3,3}\right)$$

constitue une base de C_Δ, qui est donc de dimension 5.
D'après la question **Q8**, il en résulte que C_B est lui aussi de dimension 5 et que

$$\boxed{\tilde{\mathscr{E}}_B = \left(\Psi(E_{1,1}^{(3)}), \Psi(E_{1,2}^{(3)}), \Psi(E_{2,1}^{(3)}), \Psi(E_{2,2}^{(3)}), \Psi(E_{3,3}^{(3)})\right) = \left((P_2E_{1,1}^{(3)}P_2^{-1}), (P_2E_{1,2}^{(3)}P_2^{-1}), (P_2E_{2,1}^{(3)}P_2^{-1}), (P_2E_{2,2}^{(3)}P_2^{-1}), (P_2E_{3,3}^{(3)}P_2^{-1})\right)}$$

forme une base de C_B.

I.B.3 Troisième exemple

Q 16. On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \chi_G(\lambda) = \det(\lambda I_3 - G) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^2 - 3) + 2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\chi_G(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2}$.
Ce polynôme a une racine évidente : $\chi_G(1) = 0$. Elle est double car $\chi_G'(\lambda) = 3\lambda^2 - 3$ s'annule en 1.
On factorise donc par $(\lambda-1)^2$: $\chi_G(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$. $\boxed{\text{Les valeurs propres de } G \text{ sont donc } 1 \text{ et } -2}$.
Cherchons les sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Donc $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 4x \end{cases}$$

Donc $\boxed{E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$.

Q 17. Le polynôme caractéristique de G est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{G \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R}}$.

La multiplicité de 1 vaut 2, mais son sous-espace propre est de dimension 1, donc $\boxed{G \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Q 18. Les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ trouvés dans la question 16 conviennent.

Q 19. On pose $w = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on résout le système :

$$(g - Id_{\mathbb{R}^3})(w) = v \iff \begin{cases} y = 1 \\ -y + z = 1 \\ 3y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

Q 20. Posons $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont u, v et w. Vérifions que P_3 est inversible avec le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le matrice P_3 est de rang 3, donc elle est inversible. En particulier, $\boxed{\mathscr{B}' = (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
De plus, P_3 est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$. D'après la formule de changement de bases,

$$P_3^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(g)P_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = T$$

Or, d'après les questions 18 et 19, la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$ est :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On a bien alors : $G = P_3 T P_3^{-1}$.

Q 21. **Attention :** Il y a une erreur d'énoncé ! En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne commute pas avec T.

Soit $M' = \begin{pmatrix} a & f & g \\ h & b & c \\ i & d & e \end{pmatrix}$. Calculons :

$$TM' - M'T = \begin{pmatrix} -2a & -2f & -2g \\ h+i & b+d & c+e \\ i & d & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2a & f & f+g \\ -2h & b & b+c \\ -2i & d & d+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3f & -3g \\ 3h+i & d & e-b \\ 3i & 0 & -d \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M' \in C_T \iff \begin{cases} -3f = 0 \\ -3g = 0 \\ 3h + i = 0 \\ d = 0 \\ e - b = 0 \\ 3i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = f = g = h = i = 0 \\ e = b \end{cases} \iff M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{M' \text{ est dans } C_T \text{ si et seulement s'il existe trois réels } a, b \text{ et } c \text{ tels que } M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}}$.

Q 22. Une base de C_T est donc $\boxed{\mathscr{F}' = (E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}, E_{2,3}^{(3)})}$.
D'après la question 8, la famille $\mathscr{F} = (P_3 E_{1,1}^{(3)} P_3^{-1}, P_3(E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)})P_3^{-1}, P_3 E_{2,3}^{(3)} P_3^{-1})$ est une base de C_G. En utilisant le pivot de Gauss, on trouve

$$P_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, la base cherchée est (en utilisant la calculatrice !) :

$$\boxed{\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)}$$

I.C Commutant d'une matrice d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes

Q 23. Comme A a n valeurs propres distinctes, son polynôme caractéristique admet n racines simples. Comme il est de degré n, il est scindé et toutes ses racines sont simples. Ainsi, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$. Il existe donc $P_4 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P_4 D P_4^{-1}$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Q 24. Prenons $\Pi = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
\Pi(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) &= \sum_{k=0}^{m} a_k \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_k \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \operatorname{diag}(a_k \lambda_1^k, \ldots, a_k \lambda_n^k) \\
&= \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_n^k\right) \\
&= \operatorname{diag}(\Pi(\lambda_1), \ldots, \Pi(\lambda_n))
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout polynôme $\Pi \in \mathbb{R}[X]$,

$$\boxed{\Pi(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \operatorname{diag}(\Pi(\lambda_1), \ldots, \Pi(\lambda_n))}$$

Q 25. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Theta(\mu P + Q) &= ((\mu P + Q)(\lambda_1), \ldots, (\mu P + Q)(\lambda_n)) \\
&= (\mu P(\lambda_1) + Q(\lambda_1), \ldots, \mu P(\lambda_n) + Q(\lambda_n)) \\
&= \mu(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) + (Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)) \\
&= \mu\Theta(P) + \Theta(Q)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Theta \text{ est linéaire}}$.
Soit $\Pi \in \ker(\Theta)$. Alors $\Pi(\lambda_1) = \cdots = \Pi(\lambda_n)$, donc Π a au moins n racines distinctes. Comme le degré de Π est inférieur ou égal à $n-1$, Π est le polynôme nul.
Donc $\boxed{\ker(\Theta) = \{0\} : \text{l'application } \Theta \text{ est injective}}$.

Q 26. Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$, l'application Θ est un isomorphisme : pour tout $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\Theta(Q) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad Q(\lambda_i) = \mu_i.$$

Q 27. Prenons $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$[M'D]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M']_{i,k}[D]_{k,j} = [M']_{i,j}[D]_{j,j} = \lambda_j [M']_{i,j}$$

car les seuls coefficients de D qui sont non nuls sont sur la diagonale. De même,

$$[DM']_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{i,k}[M']_{k,j} = [D]_{i,i}[M']_{i,j} = \lambda_i [M']_{i,j}$$

Donc

$$\boxed{[M'D]_{i,j} = \lambda_j [M']_{i,j} \quad \text{et} \quad [DM']_{i,j} = \lambda_i [M']_{i,j}}$$

Q 28. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
M' \in C_D &\iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad [M'D]_{i,j} = [DM']_{i,j} \\
&\iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad [M]_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \\
&\iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0
\end{aligned}$$

car tous les λ_i sont distincts. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{M' \in C_D \iff M \text{ est diagonale}}$$

Q 29. Une base de l'espace des matrices diagonales, donc de C_D est

$$\boxed{\mathscr{B}' = (E^{(n)}_{1,1}, E^{(n)}_{2,2}, \dots, E^{(n)}_{n,n})}$$

En effet, cette famille est libre car c'est une sous-famille d'une base, et elle est génératrice car pour tout $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, $\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu_1 E^{(n)}_{1,1} + \cdots + \mu_n E^{(n)}_{n,n}$.
En utilisant la question 8, une base de C_A est donc

$$\boxed{\mathscr{B} = \left(P_4 E^{(n)}_{1,1} P_4^{-1}, P_4 E^{(n)}_{2,2} P_4^{-1}, \dots, P_4 E^{(n)}_{n,n} P_4^{-1}\right)}$$

Q 30. D'après la question précédente, $\dim C_A = n$. Ceci correspond au résultat trouvé question 12 car dans cette question, on a $n = 3$ et la matrice A a 3 valeurs propres distinctes.

Q 31. D'après la question 8, la matrice M' est dans C_D. D'après la question 28, il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $M' = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
D'après la question 26, il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \mu_i$.
D'après la question 24,

$$\boxed{M = \mathrm{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) = Q(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = Q(D)}$$

Q 32. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $(P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}$.
— Initialisation : pour $n = 0$, on a $(P_4 D P_4^{-1})^0 = I_n$ et $P_4 D^0 P_4^{-1} = P_4 P_4^{-1} = I_n$, donc la formule est vraie au rang 0.
— Hérédité : prenons $n \geqslant 0$ et supposons que $(P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}$.
Alors

$$\begin{aligned}
(P_4 D P_4^{-1})^{n+1} &= P_4 D P_4^{-1} (P_4 D P_4^{-1})^n \\
&= P_4 D P_4^{-1} P_4 D^n P_4^{-1} \quad \text{d'après l'HR} \\
&= P_4 D D^n P_4 - 1 \\
&= P_4 D^{n+1} P_4^{-1}
\end{aligned}$$

La formule est vérifiée au rang $n + 1$.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}}$.
Prenons maintenant $\Pi = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
\Pi(P_4 D P_4^{-1}) &= \sum_{k=0}^{m} a_k (P_4 D P_4^{-1})^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_k P_4 D^k P_4^{-1} \quad \text{d'après la récurrence} \\
&= P_4 \left(\sum_{k=0}^{m} a_k D^k\right) P_4^{-1}
\end{aligned}$$

en factorisant à gauche par P_4 et à droite par P_4^{-1}. Donc $\boxed{Pi(P_4 D P_4^{-1}) = P_4 \Pi(D) P_4^{-1}}$.

Q 33. Comme $M' = P_4^{-1} M P_4$, on a $M = P_4 M' P_4^{-1}$.
En utilisant les deux questions précédentes, on a :

$$M = P_4 M' P_4^{-1} = P_4 Q(D) P_4^{-1} = Q(P_4 D P_4^{-1})$$

Donc $\boxed{M = Q(A)}$.

I.D Commutant d'une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres

Q 34. Soit $M' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et soit les matrices $M'_{11} \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R})$, $M'_{12} \in \mathscr{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{R})$, $M_{21} \in \mathscr{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{R})$ et $M'_{22} \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ telles que : $M' = \left(\begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22}\end{array}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
DM' = M'D &\iff \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n2}\end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22}\end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n2}\end{array}\right) \\
&\iff \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 M'11 & \lambda_2 M'_{12} \\ \hline \lambda_1 M'_{21} & \lambda_2 M'_{22}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 M'11 & \lambda_1 M'_{12} \\ \hline \lambda_2 M'_{21} & \lambda_2 M'_{22}\end{array}\right) \\
&\iff \left(\begin{array}{c|c} 0 & (\lambda_2-\lambda_1)M'_{12} \\ \hline (\lambda_1-\lambda_2)M'_{21} & 0\end{array}\right) = 0 \\
&\iff M'_{12} = M'_{21} = 0
\end{aligned}$$

Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a donc bien :

$$\boxed{M' \in C_D \iff \exists M'_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \text{ et } M'_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{R}) \text{ telles que } M' = \left(\begin{array}{c|c} M'_1 & 0 \\ \hline 0 & M'_2\end{array}\right)}$$

Q 35.

$$\begin{aligned}
M \in \mathbb{C}_A &\iff AM = MA \\
&\iff (P_5 D P_5^{-1})M = M(P_5 D P_5^{-1}) \\
&\iff (P_5 D P_5^{-1})(P_5 M' P_5^{-1}) = (P_5 M' P_5^{-1})(P_5 D P_5^{-1}) \\
&\iff P_5 D M' P_5^{-1} = P_5 M' D P_5^{-1} \\
&\iff DM' = M'D (\text{en multipliant à droite par } P_5 \text{ et à gauche par } P_5^{-1}) \\
&\iff M' \in C_D
\end{aligned}$$

Montrons que C_D est isomorphe à $\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi : \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{R}) \to C_D$ telle que $\varphi\left(M'_1, M'_2\right) = \left(\begin{array}{c|c} M'_1 & 0 \\ \hline 0 & M'_2\end{array}\right)$.
φ est linéaire et d'après ce qui précède, φ est surjective. On montre facilement que $\varphi\left(M'_1, M'_2\right) = 0 \Longrightarrow M'_1 = 0$ et $M'_2 = 0$ donc φ est injective. Ainsi, Dim C_D=Dim$\left(\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{R})\right)$=Dim $\left(\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R})\right)$+Dim$\left(\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R})\right) = n_1^2 + n_2^2$.
L'application linéaire de C_A dans C_D qui à M associe $M' = P_5^{-1} M P_5$ est également un isomorphisme d'espace vectoriel (démonstration laissée au lecteur) donc finalement on a $\boxed{\text{Dim } C_A = \text{Dim } C_B = n_1^2 + n_2^2}$.
A la question **Q15.**, on a montré que Dim $C_B = 5$ et on avait $n_1 = 2$ et $n_2 = 1$ et donc $n_1^2 + n_2^2 = 5$.
$\boxed{\text{Le résultat de cette question est cohérent avec celui de la question } \textbf{Q15.}}$

II Suites récurrentes linéaires d'ordre 3

II.A Étude du cas particulier $a = 0$

Q 36. On a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2}\end{pmatrix}$.
On a donc $\boxed{U_{n+1} = G.U_n}$ et par récurrence immédiate, $\boxed{U_n = G^n U_0}$

Q 37. On a $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = D + N$ en posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
Pour $n = 0$, on a $T^0 = I_3$ et pour $n = 1$, on a $T^1 = T$.
Soit $n \geqslant 2$: on montre facilement que N et D commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :
$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$
On montre facilement que $N^2 = 0$ donc pour tout entier $k \geqslant 2, N^k = 0$:

$T^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} = D^n + nND^{n-1}$
$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
On constate que cette formule est également valable pour $n = 0$ et $n = 1$ donc :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Q 38. On pose $T = T_1 + T_2 + T_3$ avec $T_1 = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
D'après la question **Q 36.**, on a, pour tout entier $n, U_n = T^n U_0$
Donc $U_n = P_3 (T_1 + T_2 + T_3) P_3^{-1} U_0 = P_3 T_1 P_3^{-1} U_0 + P_3 T_2 P_3^{-1} U_0 + P_3 T_3 P_3^{-1} U_0$
Le premier terme de cette somme est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans lequel on peut factoriser par 2^n,
le deuxième un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans lequel on peut factoriser par n.
On a donc $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
$\boxed{\text{Pour tout entier } n, u_n \text{ est donc une combinaison linéaire de } (-2)^n, n \text{ et } 1}$

Q 39. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout entier n, on a $u_n = \alpha(-2)^n + \beta n + \gamma$.

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} + 2u_n &= 3\alpha(-2)^{n+1} + 3\beta(n+1) + 3\gamma - 2\alpha(-2)^n - 2\beta n - 2\gamma \\ &= \alpha(-2)^n(3 \times (-2) + 2) + \beta(3n + 3 - 2n) + \gamma \\ &= 3\alpha(-2)^{n+3} + \beta(n+3) + \gamma \\ &= u_{n+3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Toute combinaison linéaire des trois suites précédentes vérifie donc la relation de récurrence II.1.}}$

II.B Étude du cas général

Q 40. φ est clairement linéaire.
Montrons que φ est surjective : soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors la suite défnie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $u_2 = \gamma$ et pour tout entier n,

$u_{n+3} = au_{n+2} + (a+3)u_{n+1} - 2(a+1)u_n$ appartient à F et a pour image $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ par φ : donc φ est surjecive.

Montrons que φ est injective : Soit u une suite de F telle que $\varphi(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence forte sur $\mathbb{N}$ que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 0$.
— Initialisation : pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ on a $u_n = 0$ puisque $\varphi(u) = 0$
— Hérédité : prenons $n \geqslant 0$ et supposons que $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = 0$
  On a alors $u_{n+3} = au_{n+2} + (a+3)u_{n+1} - 2(a+1)u_n = 0$
  La propriété est vérifiée au rang $n + 3$.
D'après le principe de récurrence forte, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 0$ donc $u = 0$ et φ est injective.
$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme et Dim } F\text{=Dim } \mathbb{R}^3 = 3}$

Q 41. φ étant un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{u, v, w\}$ est une base de F si et seulement si la famille $\{\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Cette famille est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base si et seulement si elle est libre si et seulement

si son déterminant est non nul.

On a donc : $\boxed{\{u,v,w\} \text{ est une base de } F \text{ si et seulement si } \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0}$

Q 42. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout entier n, on pose $u_n = x^n$.

$$\begin{aligned} u \in F &\iff \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+3} = ax^{n+2} + (a+3)x^{n+1} + 2(a+1)x^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, x^n\left(x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1)\right) = 0 \\ &\iff x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = 0 \text{ puisque } x \neq 0 \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{u \in F \iff x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = 0}$

Q 43. On a $1^3 - a \times 1^2 - (a+3) \times 1 + 2(a+1) = 1 - a - a - 3 + 2a + 2 = 0$ donc $\boxed{1 \text{ est racine de } C}$

On en déduit que C est factorisable par $x-1$.

On cherche donc trois réels α, β et γ tels que $x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$

$(x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma$.

On a donc le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & 1 \\ \beta - \alpha & = & -a \\ \gamma - \beta & = & -(a+3) \\ -\gamma & = & 2(a+1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 1-a \\ \gamma & = & -2(a+1) \end{array}\right.$

On a donc $x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = (x-1)(x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$. On cherche les racines du polynôme $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$: on a $\Delta = (1-a)^2 + 8(a+1) = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geqslant 0$ donc ces racines sont réelles.

Donc $\boxed{\text{les racines de } C \text{ sont réelles}}$

Q 44. D'après la question précédente, si $a \neq -3$ alors le discriminant du polynôme $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$ est strictement positif et donc ce polynôme admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

Le produit de ces deux racines est égal à $-2(a+1)$ et leur somme est égale à $(1-a)$.

Supposons que l'une de ces racines soit égale à 1 : leur produit étant égal à $-2(a+1)$ alors la seconde est égale à $-2(a+1)$, et dans ce cas la somme de ces deux racines est égale à $-2a+1$. On doit donc avoir $-2a+1 = 1-a$ soit $a = 0$, ce qui est exclus.

Donc $\boxed{C \text{ admet deux racines distinctes autres que } 1}$

D'après la question **Q41.**, les trois suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}, (r_1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$. On reconnait un déterminant de Vandermonde égal à $(r_1 - 1)(r_2 - 1)(r_2 - r_1)$ qui est bien non nul puisque r_1 et r_2 sont des réels distincts et tous deux différents de 1.

Donc $\boxed{\text{les trois suites } (1)_{n\in\mathbb{N}}, (r_1)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (r_2)_{n\in\mathbb{N}} \text{ forment une base de } F}$

Q 45. Si $a = -3$ alors le polynôme $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$ s'écrit $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ qui admet une racine double égale à -2..

Donc $\boxed{\text{Si } a = -3, \text{ l'équation (II.2) admet une racine simple égale à 1 et une racine double égale à -2}}$

Q 46. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose, pour tout entier n, $v_n = nx^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$: d'une part, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n &= (n+3)x^{n+3} - a(n+2)x^{n+2} - (a+3)(n+1)x^{n+1} + 2n(a+1)x^n \\ &= x^n\left((n+3)x^3 - a(n+2)x^2 - (a+3)(n+1)x + 2n(a+1)\right) \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} x^n\left(nC(x) + xC'(x)\right) &= x^n\left[n\left(x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1)\right) + x\left(3x^2 - 2ax - (a+3)\right)\right] \\ &= x^n\left(nx^3 - nax^2 - n(a+3)x + 2n(a+1) + 3x^3 - 2ax^2 - (a+3)x\right) \\ &= x^n\left((n+3)x^3 - a(n+2)x^2 - (a+3)(n+1)x + 2n(a+1)\right) \end{aligned}$$

Donc on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n = x^n\left(nC(x) + xC'(x)\right)}$

Q 47. Si $a = -3$ et en utilisant la notation précédente, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n &= (-2)^n\left(nC(-2) - 2C'(-2)\right) \\ &= 0 \text{ puisque -2 est racine double de } C \text{ donc } C(-2) = C'(-2) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{si } a=-3, \text{ la suite } \left(n(-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est un élément de } F}$

Montrons que la famille $\left\{(1)_{n\in\mathbb{N}}, \left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(n(-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ est une base de F :

On utilise la question **Q41.** : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$

Donc $\boxed{\text{la famille } \left\{(1)_{n\in\mathbb{N}}, \left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(n(-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\} \text{ est une base de } F}$

Q 48. On reconnait l'équation qui définit F avec $a=-3$.

D'après la question précédente, on sait qu'il existe trois réels α, β et γ tels que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \alpha+\beta(-2)^n+\gamma n(-2)^n$

Or, on a $u_0=1$, $u_1=0$ et $u_2=1$ donc on a le système :

$\begin{cases} \alpha+\beta & = & 1 \\ \alpha-2\beta-2\gamma & = & 0 \\ \alpha+4\beta+8\gamma & = & 1 \end{cases}$ On résout le système et on trouve : $\begin{cases} \alpha & = & \dfrac{5}{9} \\ \beta & = & \dfrac{4}{9} \\ \gamma & = & -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

On a donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \frac{5}{9}+\frac{4}{9}(-2)n-\frac{1}{6}n(-2)^n)}$