Séries entières

1 Rayons de convergence

On retiendra qu'il y a autre chose que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *pour calculer des rayons de convergence : très souvent, il est préférable de penser les choses en termes de « pour quels* r *la suite* $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle bornée ? »*

Exercice 1 – *Mines 2016 [5/10]*
Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des $r \geqslant 0$ tels que $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k r^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 2 – *TPE 2016 [3/10]*
Donner le rayon puis le domaine de convergence de

$$\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) x^n$$

Exercice 3 – *Centrale 2010 [2/10]*
On définit, pour $n \geqslant 2$, $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot$ Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} a_n x^n$.

Exercice 4 – *Des rayons ; stage 1*
Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, avec a_n défini des façons suivantes :

1. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$;
2. $a_n = \mathrm{e}^{(n+1)^2} - \mathrm{e}^{n^2}$;
3. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$ puis $a_n = \sqrt{n}^{-\sqrt{n}}$;
4. $a_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$ puis $a_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$;
5. $a_n = \left(\cosh\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$;
6. $a_n = 999^{\sqrt{n}}$.

Exercice 5 – *Des rayons ; stage 2*
Same player shoot again.

1. $a_{2n} = 971^n$ et $a_{2n+1} = 999^n$;
2. $a_n = \begin{cases} (\sqrt{n})! & \text{si } n \text{ est un carré d'entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $a_n = \begin{cases} 945^p & \text{si } n = p! \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans les situations un peu théoriques, on peut (pour se fixer les idées) remplacer l'hypothèse « $R(\sum a_n z^n) = K$ » par « $a_n = \dfrac{1}{K^n}$ » : ça marche assez bien pour intuiter le bon résultat.

Exercice 6 – *Gapembert [5/10]*
On suppose : $\dfrac{a_{n+2}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 7 – *a_n^2, $\dfrac{a_n}{n!}$ et $n!a_n$ [6/20]*
On suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Que dire de celui de $\sum a_n^2 z^n$? et de celui de $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$? Et enfin de celui de $\sum n! a_n z^n$?

2 Calculs de somme

Exercice 8 – *CCP 2017 [4/10]*
Rayon de convergence et calcul de la somme de la série entière

$$\sum \frac{3n}{n+2} x^n$$

Exercice 9 – *Mines 2016 (deux fois) [4/10]*
Rayon de convergence et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{(2n+1)!} x^n$.

Exercice 10 – *Mines-Télécom 2016 [2/10]*
Rayon de convergence et calcul de la somme de la série entière $\sum (n^2+n+1) x^n$

Exercice 11 – $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ *[8/10]*
On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Établir une équation différentielle du quatrième ordre vérifiée par f, et la transformer en une équation du deuxième ordre en considérant $f'' + f$.
3. Trouver la valeur de $f(x)$.

Exercice 12 – *Mines 2009 [9/10]*
Calcul de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+1}{(2n-1)(n+1)} x^n.$$

Exercice 13 – *Encore des sommes [8/10]*
Calculer les sommes suivantes (en donnant les rayons de convergence) :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^n$.

Exercice 14 – *Mines 2010 [9/10]*
Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.
Si jamais on arrive à quelque chose ressemblant[1] *à* $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$, *on n'ira pas plus loin dans les calculs...*

Exercice 15 – *DES, dérivation... [6/10]*
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+3n+2)(2n)!}$.

3 Des développements en série entière

Exercice 16 – *Mines 2017 [6/10]*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Donner le développement en série entière de

$$f : x \longmapsto \frac{(\operatorname{sh}\alpha)x}{x^2 - 2(\operatorname{ch}\alpha)x + 1}.$$

Exercice 17 – Arccos *[2/10]*
Développer la fonction Arccos en série entière.

Exercice 18 – *TPE 2009 [6/10]*
Soit $f : x \in [-1,1] \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$.
2. Montrer par deux méthodes que f est développable en série entière autour de 0.

Exercice 19 – *Mines 2010 [8/10]*
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n^2 x)\mathrm{e}^{-n}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. En minorant $\left|f^{(2p)}(0)\right|$ pour $p \in \mathbb{N}$, montrer que f n'est pas développable en série entière.

Exercice 20 – *Des développements en série entière*
Développer en série entière (en précisant le domaine de validité du développement) les « fonctions » suivantes :

1. $\ln(x^2 - 5x + 6)$.
2. $\mathrm{e}^x \sin x$;
3. $\ln(1 + x + x^2)$ (attention : $1 + x + x^2 = \frac{\cdots}{\cdots}$) ;
4. $\dfrac{1}{1 + x - 2x^3}$;
5. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (il y a peut-être un produit de Cauchy qui rôde...).
6. $\left(\dfrac{(1+x)\sin x}{x}\right)^2$;
7. $\dfrac{x}{1-x-x^2}$: par décomposition en éléments simples, puis en utilisant la relation $(1-x-x^2)f(x))x$.

1. ...

4 Mais aussi...

Exercice 21 – *TPE 2009 [8/10]*

Soient $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-t\sin x} dt$ et (E) l'équation $ty'' + y' - ty + 1 = 0$.
Montrer que f vérifie (E). Trouver les solutions de (E) développables en séries entière. En déduire la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

Exercice 22 – *Mines 2010 : nombres de Catalan [7/10]*

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$. Expliciter u_n.

Exercice 23 – *Partitions d'un entier [6/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, P_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$, en convenant que $P_0 = 1$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$.
2. Montrer que $\sum P_n z^n$ est de rayon de convergence nul.
3. Montrer que $\sum \dfrac{P_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, et que pour $|z| < R$, on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{P_n}{n!} z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1}$.

Exercice 24 – *À la Cesaro [9/10]*
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge et le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ soit égal à 1. Soit $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $b_n \sim a_n$. Montrer que lorsque x tend vers 1^-, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

5 Des indications (et même un peu mieux)

Exercice 1 – Notons R_a le rayon de convergence, et S la borne supérieure en jeu, ainsi que $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}'$ les ensembles dont R_a et S sont les bornes supérieures par définition. D'une part, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}_a$, donc $S \leqslant R_a$. Mais si $r < R_a$, alors $\sum a_n r^n$ est convergente, donc les sommes partielles sont bornées, donc $r \in \mathcal{E}'$. Ceci montre : $R_a \leqslant S$ (quitte à passer par $r = S - \frac{R_a}{n}$).

Exercice 2 – $\pi\sqrt{n^2+1} = n\pi\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\right)$, puis $u_n = \frac{(-1)^n}{2n} + O(1/n^2)$...

Exercice 3 – On trouve $a_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, donc $R = 1$

Exercice 4 – D'Alembert : $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; $\sim \mathrm{e}^{(n+1)^2}$: 0 ; $a_n r^n = \mathrm{e}^{\cdots}$: 1 et 1 et 1 et 1 ; même méthode : si $\alpha > 3$ alors $R = 0$, si $\alpha < 3$ alors $R = 1$ et si $\alpha = 3$ alors $R = \mathrm{e}^{-1/2}$; $a_n r^n = \mathrm{e}^{\cdots}$: 1.

Exercice 5 – $(a_n r^n)$ bornée ? $\dfrac{1}{\sqrt{999}}$; 1 ; 1 ; $\sim K\varphi^n$ avec $K > 0$: $R = \dfrac{1}{\varphi}$.

Exercice 6 – D'Alembert pour les suites : en prenant $u_n = a_n r^n$ on s'intéresse au caractère bornée de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ; finalement $R = \sqrt{\dfrac{1}{|\ell|}}$.

Exercice 7 – Avec $|a_n|\, r^n$: $R_1 = R^2$, $R_2 = +\infty$ et on ne peut rien dire pour R_3 : voir $a_n = 1$ ($R = 1$ et $R_3 = 0$), $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$ ($R = +\infty$ et $R_3 = 0$), $a_n = \dfrac{1}{n!}$ ($R = +\infty$ et $R_3 = 1$). On peut quand même dire que si R est fini, alors $R_3 = 0$.

Exercice 8 – Je commence par écrire $\dfrac{3n}{n+2} = 3 - 6\dfrac{1}{n+2}$, et quelques lignes plus loin j'obtiens pour $x \in [-1, 0[\cup]0, 1[$: $S(x) = \dfrac{3}{1-x} + \dfrac{6}{x^2}\left(\ln(1-x) + x\right)$

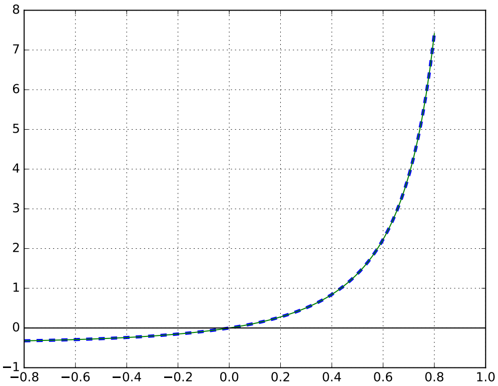

FIGURE 1 – $S_{50}(x)$ vs. $\frac{3}{1-x} + \frac{6}{x^2}\left(\ln(1-x) + x\right)$

Exercice 9 – Il peut être intéressant de partir de $\dfrac{n}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(2n)!} - \dfrac{1}{(2n+1)!}\right)\cdots$

Exercice 10 – $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)x^n = x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)nx^{n-1} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n = x\,(\cdots)'' + \cdots$

Exercice 11 – On a bien entendu $f^{(4)} = f$, équation à laquelle on peut appliquer la théorie vue en première année (le passage de l'ordre 2 à l'ordre 4 étant naturel...), ou bien comme proposé dans l'énoncé, on pose $g = f'' + f$, de sorte que $g'' - g = 0$... On aurait pu voir dès le début que $f(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \cosh x)$, par exemple via e^x, e^{ix}, ... : cf exercice précédent.

Exercice 12 – Déjà, $\dfrac{4n+1}{(2n-1)(n+1)} = \dfrac{2}{2n-1} + \dfrac{1}{n+1}\cdot$ Ensuite, distinguer les x strictement positifs ou négatifs. Pour $x > 0$ par exemple, on trouve $-1 - \dfrac{\ln(1-x)}{x} + \sqrt{x}\mathrm{Argth}\sqrt{x}$ via $F(t^2)$ ou bien en sommant des intégrales.
Avec Argth : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ *qui est une primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1/2}{1+x} + \dfrac{1/2}{1-x}\cdot$

Exercice 13 – pour $x > 0$, $f_1(x) = \sqrt{x}\mathrm{Argth}(\sqrt{x}) - 1$ (considérer $\left(\dfrac{f(x^2)+1}{x}\right)'$), avec $R_1 = 1$. De même, $R_2 = 1$, et après une décomposition en éléments simples, pour $x > 0$: $f_2(x) = \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{5\mathrm{Argth}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\cdot$
Enfin, $R_3 = +\infty$, avec $f_3(x) = \begin{cases} \cosh\sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 14 – Définissons, pour $-1 < x \leqslant 1$: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$. On a sur $]-1, 1[$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, puis $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}\cdot$ La convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$ (majoration du reste d'une série alternée) nous assure que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} f(1)$, donc[2] $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}\cdot$ Après un calcul fastidieux mais sans finesse particulière :

$$S = f(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(2+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi.$$

Exercice 15 – Décomposition en éléments simples, dérivation... pour trouver $-10 + 2\mathrm{e} - \dfrac{14}{\mathrm{e}}\cdot$

Exercice 16 – Sauf erreur,

$$\frac{(\operatorname{sh}\alpha)x}{x^2 - 2(\operatorname{ch}\alpha)x + 1} = \frac{(\operatorname{sh}\alpha)x}{(x-\mathrm{e}^{\alpha})(x-\mathrm{e}^{-\alpha})} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}/2}{x-\mathrm{e}^{\alpha}} + \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}/2}{x-\mathrm{e}^{-\alpha}}\cdot$$

Le rayon de convergence est alors $\mathrm{e}^{-\alpha}$, et après factorisation on développe $\dfrac{1}{1-u}$ en série entière.

Exercice 17 – La dérivée de la fonction Arccos est développable en série entière, avec un rayon 1. En intégrant : $\operatorname{Arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n n!^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot$

Exercice 18 – Pour la continuité, convergence uniforme par contrôle du reste, ou normale par regroupement par deux. Interversion dans $\displaystyle\sum_n\sum_k \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{-x}{n}\right)^k$ par convergence normale (après regroupement par deux). What else ?

Exercice 19 – On devrait avoir $\dfrac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} = O(1/R^{2p})$, ce qui n'est guère envisageable, car avec une comparaison somme/intégrale soigneuse (attention à la bosse) :

$$f^{(2p)}(0) = \sum_{n=0+}^{+\infty} n^{4p}\mathrm{e}^{-n} \geqslant \int_0^{+\infty} t^{4p}\mathrm{e}^{-t}dt - (4p)^{4p}\mathrm{e}^{-4p} \sim (4p)!$$

d'après Stirling.

Exercice 20 – Tout d'abord, sur $]-2,2[$: $f_1'(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-x/3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-x/2}\cdots$ Ensuite[3], $\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$; on décompose en éléments simples pour trouver sur $]-1,1[$:

$$f_2(x) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(1 + 2.2^{n/2}\left(2\cos(3n\pi/4) - \sin(3n\pi/4)\right)\Big)x^n.$$

Il est pratique d'écrire $f_3(x) = (1-x)(1-x^2)^{-1/2}$, pour obtenir après produit de Cauchy entre des séries absolument convergentes (pour $|x| < 1$) :

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right).$$

Exercice 21 – Théorème de Leibniz pour les deux dérivations, qui fournissent bien l'équation souhaitée, via une intégration par parties dans $tf''(t)$. Ensuite, $g(t) = \sum a_n x^n$ vérifie (E) si et seulement si $(n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui laisse exactement deux degrés de libertés (pour obtenir des séries de rayons de convergence infinis). Par ailleurs, on peut intervertir sans problème somme et intégrale dans

2. Préciser !
3. Désolé...

$f(t)$ (après avoir écrit l'exponentielle comme une série !), ce qui donne : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{I_n}{n!} t^n$. On trouve finalement comme toujours : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p p!^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{4^p p!^2}{(2p+1)!}\cdot$ *« Ce n'est peut-être pas la méthode la plus efficace pour calculer I_n »...*

Exercice 22 – Grand classique : $f(x) = \sum u_n x^n$ vérifie, si son rayon de convergence est strictement positif : $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$, puis $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\cdot$ Réciproquement, l'application $g : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ est bien développable en série entière, et les coefficients du développement vérifient la même relation de récurrence que les u_n (avec les mêmes premières valeurs), donc sont égaux aux u_n. Finalement, $\left(^{u_n=}_{2nn}\frac{1}{n+1}\right)$.
Les informaticiens ont vu[4] *une preuve a priori de la majoration $u_n \leqslant 4^n$, ce qui simplifiait une partie du raisonnement.* Enfin, pour f_4, la décomposition en éléments simples est standard. Il est intéressant de noter que les coefficients de la série de Taylor vérifient la relation $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$: il s'agit de la suite de Fibonacci, et f_4 est développable en série entière sur $]1/\alpha, -1/\alpha[$, avec $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot$

Exercice 23 – Choisir le nombre d'éléments qui vont accompagner $n+1$, puis choisir ces éléments, puis partitionner le reste. La relation de récurrence induit $P_n \geqslant n!$ par récurrence immédiate, d'où le rayon de convergence nul si on ne divise pas par $n!$. Enfin, en notant $\alpha_n = \frac{P_n}{n!}$, on a $\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{n-k}$, relation dont on tire $S'(x) = S(x)\mathrm{e}^x$...

Exercice 24 – On va poser $c_n = b_n - a_n$ (de sorte que $c_n = o(a_n)$), et montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = o\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)$. On fixe pour cela $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N au delà duquel on a d'une part $|c_n| \leqslant \varepsilon a_n$, et d'autre part $\left|\sum_{k=0}^{n} c_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} a_k$ (théorème de comparaison des sommes partielles dans le cas d'une série positive divergente).
On a alors $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n x^n\right| \leqslant \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$. Pour le premier morceau, on est ramené à des polynômes :

$$\left|\frac{\sum_{n=0}^{N} c_n x^n}{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n}\right| \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \left|\frac{\sum_{n=0}^{N} c_n}{\sum_{n=0}^{N} a_n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

donc pour x assez proche de 1, etc...

4. en interprétant u_n comme le nombre d'arbres binaires à n nœuds