$\zeta(2)$ via Riemann-Lebesgue

1. (a) Des intégrations par parties banales effectuées calmement nous conduiront au bon résultat :
$$\boxed{\int_0^\pi t\cos(nt)dt=\frac{(-1)^n-1}{n^2}\qquad\text{et}\qquad\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt=\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\cdot}$$
On aura bien entendu pensé à simplifier les $\cos(n\pi)$ et $\sin(n\pi)$, sachant que n est entier. *Bien entendu...*

   (b) Oui.

   (c) Au vu des résultats précédents, il *suffit*[1] manifestement de prendre :
$$\boxed{b=-1 \text{ puis } a=\frac{1}{2\pi}\cdot}$$

2. (a) Calcul fait 100 fois... $S(t)$ est la partie réelle de $\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ikt}=e^{it}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ikt}=e^{it}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}$ (on avait noté que $e^{it}\neq 1$, puisque $t\in]0,\pi]$). Un passage à l'angle moitié fournit ensuite :
$$\boxed{S(t)=\frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cdot}$$

   (b) Vous vous débrouillez[2] comme vous voulez pour trouver :
$$\boxed{\sin\theta\cos\beta=\frac12\left(\sin(\theta+\beta)+\sin(\theta-\beta)\right).}$$

   (c) En combinant ce qui précède, on obtient : $S(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)+\sin\left(-\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$, soit encore :
$$\boxed{S(t)=-\frac12+\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot}$$

3. (a) Une intégration par parties fournit :
$$\int_a^b f(t)e^{\lambda it}dt=\frac{f(b)e^{\lambda ib}-f(a)e^{\lambda ia}}{i\lambda}-\frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{\lambda it}dt.$$
En majorant d'abord le module de la somme par la somme des modules, puis le module de l'intégrale par l'intégrale du module, on obtient en deux temps :
$$\left|\int_a^b f(t)e^{\lambda it}dt\right|\leqslant\frac{1}{\lambda}\left(|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b|f'(t)|\,dt\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
« M'sieur, j'ai rien compris à vos majorations ! » « Hum... quel est le module de $e^{\lambda it}$ *à ton avis ? Et as-tu écris le calcul, plutôt que de l'imaginer dans ta tête ? »*

1. Et personne n'aura écrit qu'il *fallait* : c'est certes vrai, mais en général non justifié, ce n'est pas demandé, et surtout ça ne répond pas à la question...
2. Par exemple : « Hey, je sais que $\sin(\theta+\beta)$ et $\sin(\theta-\beta)$ font intervenir ce produit. Je les écris et je combine ». Ou encore : passage par l'écriture complexe du sinus et du cosinus

(b) Il suffit de voir que $\int_a^b \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$ est la partie imaginaire de $\int_a^b \psi(t)e^{i(n+1/2)t}dt$, et que cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ d'après la question précédente. Ainsi :

$$\boxed{\int_a^b \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

4. On commence par montrer que φ admet une limite finie en 0. Pour cela, on va tout mettre sous même dénominateur. Celui-ci a un équivalent gratuit. Pour le numérateur, il suffit de partir d'un développement limité du sinus à l'ordre 3, et on obtient ainsi :

$$\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{\frac{t}{2}}=\frac{t/2-(t/2-t^3/6.8+o(t^3))}{t/2\sin(t/2)}\sim\frac{t^3/48}{t^2/4}\sim\frac{t}{12}\cdot$$

Ainsi, φ se prolonge en une fonction continue sur $[0,\pi]$ en posant $\widetilde{\varphi}(0)=0$. Le calcul précédent nous donne même un développement limité à l'ordre 1, assurant le caractère dérivable de $\widetilde{\varphi}$ en 0 avec $(\widetilde{\varphi})'(0)=\frac{1}{12}\cdot$ Il reste à vérifier la continuité de la dérivée, c'est-à-dire : $(\widetilde{\varphi})'(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}\frac{1}{12}\cdot$ Le calcul est de même nature (mais à l'ordre 4 en t) et laissé au lecteur.

5. Pour $t>0$, on a d'après la question 2 :

$$S(t)=-\frac{1}{2}+\frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}=-\frac{1}{2}+\frac{\sin((n+1/2)t)}{2}\left(\varphi(t)+\frac{2}{t}\right)$$

et ainsi :

$$(at^2+bt)S(t)=-\frac{1}{2}(at^2+bt)+\sin((n+1/2)t)\left(at+b+(at^2+bt)\varphi(t)/2\right).$$

Grâce à la question précédente, on peut étendre cette relation à $[0,\pi]$ (en remplaçant φ par $\widetilde{\varphi}$). Cette relation, une fois intégrée entre 0 et π, fournit :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=-\frac{1}{2}\int_0^\pi(at^2+bt)dt+\int_0^\pi\sin((n+1/2)t)\left(at+b+(at^2+bt)\widetilde{\varphi}(t)/2\right)dt.$$

La question 3b nous dit que la deuxième intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}\int_0^\pi(at^2+bt)dt=-\frac{a}{2}\frac{\pi^3}{3}-\frac{b}{2}\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi^2}{12}+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{6},$$

et ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\cdot}$$