# Intégration

## 1 Rappels de première année ; intégration sur un segment

**Exercice 1** – *TPE 2017 (deux fois) [3/10]*
Déterminer la limite, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2} \mathrm{e}^{-n/k}.$$

**Exercice 2** – *CCP 2017 [6/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n} dt$.

1. Déterminer la limite de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
2. Établir la nature de $\sum u_n$.

**Exercice 3** – *Mines 2016 [9/10]*
Soit $f$ une fonction continue et à valeurs positives sur $[a, b]$. Déterminer la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \left( \int_a^b f(t)^n dt \right)^{1/n}$$

**Exercice 4** – *CCP 2016 [8/10]*
On pose $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$, et pour $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{sh}^n(t) dt$.

1. Résoudre $\mathrm{sh}x = 1$.
2. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
   (b) En déduire un encadrement puis un équivalent de $I_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5** – *CCP 2009 [3/10]*

1. Calculer la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Exercice 6** – *TPE 2009 [3/10]*
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
**Indication :** On pourra considérer la fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$.

## 2 Intégrales convergentes et fonctions intégrables

**Exercice 7** – *CCP 2017 [6/10]*
On admet : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction
$$\frac{2X+1}{X(X+1)^2}.$$
2. Justifier l'existence et calculer la valeur de
$$\int_0^1 t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt.$$

**Exercice 8** – *Centrale 2017 [6/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Expliciter une relation de récurrence entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
2. On définit (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) : $v_n = \ln(u_n) + \alpha \ln(n)$. Étudier, en fonction de $\alpha$, le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 9** – *Mines 2017 [6/10]*
On suppose : $0 < a < b$, et $f$ désigne une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Prouver l'existence de l'intégrale suivante, et donner sa valeur :
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$$

**Exercice 10** – *Mines 2017 [6/10]*
Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^3 x} dx$.

**Exercice 11** – *Mines-Télécom 2016 [6/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

1. On suppose : $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Montrer : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
2. On suppose : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Que dire de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?
3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(2t) - \mathrm{Arctan}(t)}{t} dt$.

**Exercice 12** – *CCP 2016 [7/10]*
On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.

1. Justifier que $I$ converge.
2. Montrer : $I = \displaystyle\frac{3}{4} \lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
3. Montrer que $t > 0 \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. En déduire la valeur de $I$.

**Exercice 13** – *Mines 2010 [6/10]*
Montrer que $f : x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ mais que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

**Exercice 14** – $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *[5/10]*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. Montrer : $\ell = 0$.
2. Exhiber un cas de fonction dérivable et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que sa dérivée ne possède pas de limite en $+\infty$.

**Exercice 15** – *TPE 2010 – pas évident, mais intéressant et classique [5/10]*
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor\right) dt$.

**Exercice 16** – *Petites mines 2015 [5/10]*
Étudier la convergence puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$.

**Exercice 17** – *Mines 2015 [6/10]*

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du.$$
2. Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $2\pi$-périodique et de moyenne nulle. Montrer que $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(u)du$ est périodique.
3. [Ajoutée par mes soins] Montrer que sous les conditions de la question précédente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}dt$ est convergente.
4. Soit $\delta \in ]0, 1[$. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^x \left|\frac{\sin u}{u^\delta}\right| du$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

# 3 Interversions de symboles

**Exercice 18** – *Mines 2022 [4/10] - Perla E.K.*
On s'intéresse ici à $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt$.

1. Montrer que $I$ converge.
2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
3. Calculer $I$, sachant que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

*Question supplémentaire : quelles sont les hypothèses manquantes pour rendre vraie l'assertion « $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum u_{2k}$ et $\sum u_{2k+1}$ convergent. » ?*

**Exercice 19** – *Mines 2022 [6/10] - Maxence N.*

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(at)\mathrm{e}^{-bt}dt$ et calculer sa valeur.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

**Exercice 20** – *CCP 2017 [5/10]*
Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{2(1-t)^2} dt.$

1. Montrer que $I$ est convergente.
2. Développer en série entière $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
3. En déduire : $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

**Exercice 21** – *ENSAM 2017 [4/10]*

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$.
2. Montrer : $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2}$.
3. Sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, donner la valeur de $I$.

**Exercice 22** – *Mines-télécom 2017 [4/10]*
On définit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx.$

1. Montrer que $I$ est définie.
2. En utilisant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-u}$, montrer :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

3. Calculer $I$ (on donne : $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$).

**Exercice 23** – *CCP 2017 (deux fois) [6/10]*
Déterminer la nature et la somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.

**Exercice 24** – *Centrale 2017 [5/10]*
On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z$ tel que $|z| < R$, on définit $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$.

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$, déterminer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ki\theta} d\theta$.
2. Pour $r \in [0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| S_n(r\mathrm{e}^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k}.$$

3. Montrer que $\sum |a_n|^2$ est convergente, et calculer sa somme.

*Il y avait une suite...*

**Exercice 25** – *Centrale 2015 et CCP 2016 [6/10]*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Justifier l'existence de $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.
3. Montrer : $I_n \sim \dfrac{L}{n}\cdot$
4. Montrer enfin :

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot$$

**Exercice 26** – *TPE 2016 [6/10]*

Après avoir justifié la convergence des deux membres, montrer :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}\right) dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot$$

**Exercice 27** – $\displaystyle\int_0^n f(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ *[4/10]*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la suite de terme général

$$I_n = \int_0^n f(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

converge vers...

**Exercice 28** – *CCP 2008 [5/10]*

Pour $n \geqslant 1$ et $t > 0$, on pose $f_n(t) = \dfrac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1+\dfrac{1}{nt}\right)\cdot$

1. Montrer que $f_n$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
2. Étudier la limite de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 29** – *Mines 2010 – attention à l'interversion [8/10]*

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$.

1. Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$ ?
2. Montrer :

$$u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

**Exercice 30** – *Mines 2010 – attention encore ! [8/10]*

1. Justifier, pour $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}\cdot$
2. Montrer que $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}dt$.

3. Convergence et somme de la série de terme général $R_n$.

**Exercice 31** – *CCP 2011 [4/10]*
On définit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$. Montrer : $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$.

**Exercice 32** – *Centrale 2015 [6/10]*
Soit $a \in ]0, \pi/2[$. Étudier la convergence de la suite de terme général $\int_0^a (\tan t)^n dt$.

## 4 Intégrales à paramètres

**Exercice 33** – *CCINP 2022 [3/10] - Perla E.K.*
On pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \sin(xt) dt$.

1. Montrer que $\varphi$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Exprimer $\varphi'$ puis $\varphi$ à l'aide des fonctions usuelles.

**Exercice 34** – *CCINP 2022 [4/10] - Hugo D.*
On définit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(1 + xt)}{t} dt$.

1. Montrer que $F$ est définie au moins sur $]-1, 1[$
2. Montrer que $F$ est développable en série entière.
3. Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$.
4. Donner une expression simple de $F'(x)$.
5. Retrouver le résultat de la question précédente d'une autre manière.

**Exercice 35** – *CCP 2017 [6/10]*
On définit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t} dt$.

1. (a) Montrer que $f$ est définie sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que $f$ est continue.
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \int_{n-1}^{n} \ln(f(t))\, dt$. Donner la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$.
   *Indication : on pourra utiliser* $\varphi : x \mapsto \int_{x-1}^{x} \ln(f(t))\, dt$.

**Exercice 36** – *CCP 2017 [5/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t - 1} dt$.

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Donner la limite de $f$ en $+\infty$.
3. Calculer, pour $x > 0$, $f(x + 1) - f(x)$.
4. En déduire une expression de $f(x)$ sous forme d'une somme de série.
5. Comment déterminer une expression de $f(x)$ avec une autre méthode ?

**Exercice 37** – *Mines 2017 [8/10]*
On définit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + \operatorname{ch} t}$.

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Prouver le caractère $\mathcal{C}^1$ de $f$.
3. Établir l'existence et la valeur de la limite de $f$ en $+\infty$.
4. Donner un équivalent de $f$ en $+\infty$.

**Exercice 38** – *Mines 2016 [8/10]*
Pour $x > 0$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^{x+1}}$.

1. Montrer que $f$ est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ puis en 0.
4. Donner un équivalent de $f$ en 0.

**Exercice 39** – *Centrale 2016 [6/10]*

1. Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt$ est convergente.
2. Montrer que $f$ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ est convergente.
5. Montrer que
$$\widetilde{f} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_- \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Exercice 40** – *ENSEA 2016 [5/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{ixt} dt.$$

1. Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathcal{C}^1$.
2. En passant par une équation différentielle, calculer $f(x)$.

**Exercice 41** – *Mines-Télécom 2016 [5/10]*
Pour $x \in D = [1, +\infty[$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1+xt^3} dt$.

1. Montrer que $f$ est continue sur $D$.
2. Montrer qu'au voisinage de 0, on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} x^{3n}$.

**Exercice 42** – *Mines 2016 [8/10]*
On définit $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{\mathrm{e}^t - 1} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $I$, puis étudier le caractère $\mathcal{C}^1$.

2. Expliciter $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{b+n^2}$.
3. Déterminer un équivalent de $I(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 43** – *Centrale 2003, 2010, ENSEA 2015, CCP et Mines-Télécom 2016 ; etc. [6/10]*
Calculer $f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt) dt$ :

1. à l'aide d'une équation différentielle vérifiée par $f$ ;
2. à l'aide du développement en série du cosinus.

**Exercice 44** – *CCP 2008 [5/10]*
On pose $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{t^2+1} dt$ et $G(x) = \left( \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2} du \right)^2$.

1. $F$ est-elle continue sur $[0, +\infty[$ ? Dérivable ?
2. Montrer que $G(x) = \frac{\pi}{4} - F(x)$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du$.

**Exercice 45** – *Petites mines 2015 [5/10]*
On définit (quand c'est possible !) :

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{x} dx$$

1. Donner le domaine de définition de $F$.
2. Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Calculer sous forme simple $F'(\lambda)$ puis $F(\lambda)$.
4. Soient $a, b > 0$. Que vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} dx$ ?

**Exercice 46** – *CCP 2015 [6/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad |f(t)| \leqslant C\mathrm{e}^{at}.$$

1. Montrer que pour $x > a$, l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt} dt$ converge.
2. On suppose que $a = 0$ et $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$xF(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \ell.$$

# 5 Indications, solutions partielles

*Exercice 1* – J'ai d'abord pensé qu'il y avait une erreur dans l'énoncé... mais non, c'est bien directement une somme de Riemann de fonction continue !

*Exercice 2* – Une simple majoration de $u_n$ par $\int_0^1 x^n dx$ est suffisante pour la première question. J'ai dû un peu plus chercher avant de trouver la minoration $1 + x + \cdots + x^n \geqslant \frac{n}{2} x^{n/2}$ pour conclure... (je ne savais pas si je devais majorer ou minorer, donc j'ai dû tâtonner).

*Exercice 3* – La limite de $\|f\|_n$ est bien entendu $\|f\|_\infty$ ! Exercice difficile car il faut epsiloniser. Tout d'abord (après avoir fixé $\varepsilon_0 > 0$) $\|f\|_n \leqslant (b-a)^{1/n}\|f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$, donc $\|f_n\| \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon_0$ à partir d'un certain rang. Ensuite, il existe $x_0$ tel que $f(x_0) = \|f\|_\infty$, ainsi qu'un segment $[\alpha, \beta]$ sur lequel $f \geqslant f(x_0) - \varepsilon_0/2$. On minore alors $\|f\|_n$ par une quantité convergeant vers $\|f\|_\infty - \varepsilon_0/2$, donc $\|f_n\| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon_0$ à partir d'un certain rang... et on y est presque !

*Exercice 4* – Partir de $\mathrm{sh}^n = \mathrm{sh}^{n-2}\mathrm{sh}^2 = \mathrm{sh}^{n-2}(\mathrm{ch}^2 - 1)$, casser en deux, intégrer par parties... Le théorème de convergence dominée donne bien : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, qu'on peut aussi obtenir via $I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n}$. J'ai probablement loupé quelque chose, car pour l'équivalent, j'ai besoin de $I_n \sim I_{n-2}$, et pour cela je passe par $I_{n-4}$ : $nI_n + I_{n-2} = (n-3)I_{n-4}$ fournit $I_n \sim I_{n-4}$, puis par encadrement/gendarmes, $I_n \sim I_{n-2}$ et enfin $2nI_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$ ; WOW...

*Exercice 5* – $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t) = 2\ln 2 - 1$. Pour la deuxième somme, la majoration $|\ln(1+u)| \leqslant |u|$ est suffisante.

*Exercice 6* – Intégrer $n$ fois par parties la fonction suggérée...

*Exercice 7* – La fonction en jeu étant positive, elle est intégrable si et seulement si l'intégrale est convergente (assurez-vous de bien comprendre cette phrase), ce qui conduit à s'intéresser à $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^1 t\left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor dt$. Puisque $\Phi$ est décroissante, sa limite (dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) en $0^+$ est celle de $\Phi(1/n)$... qui doit être égale, sauf erreur de ma part, à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdots$

*Exercice 8* – Sauf erreur, en partant de

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1+t^3}{(1+t^3)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}} + \frac{t}{3}\frac{3t^2}{(1+t^3)^{n+1}}$$

puis en intégrant par parties ce qu'on imagine, je trouve après nettoyage : $u_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n}u_n$. Ensuite, $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\dfrac{1}{3n} + O(1/n^2)$, puis $v_{n+1} - v_n = (-1/3+\alpha)\dfrac{1}{n} + O(1/n^2)$ ; il semble alors raisonnable de prendre $\alpha = 1/3$, et on obtient alors $\sum(v_{n+1} - v_n)$ convergente, donc $u_n = \mathrm{e}^{(-\ln n)/3 + \ell + o(1)}$ et enfin : $u_n \sim \dfrac{K}{\sqrt[3]{n}}$.

*Exercice 9* – Passer par $\displaystyle\int_\varepsilon^X$, qui se casse en deux morceaux : $\displaystyle\int_{aX}^{bX}$ tend vers 0 et $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}$ tend vers $f(0)\ln\dfrac{b}{a}$ (attention, il est probablement question de la différence de ces deux morceaux...).

*Exercice 10* – D'abord une intégration par parties ($\dfrac{\mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^3} = \mathrm{sh} \times \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}^3}$) puis le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$... Le résultat très simple ($\pi/4$) que me donne Wolfram-Alpha me laisse penser que je suis passé à coté de quelque chose...

*Exercice 11* – L'auteur de l'exercice voulait probablement epsiloniser, mais avec des changements de variables de type $t = xu$, on peut s'en sortir avec de la convergence dominée pour les deux premières questions. Ensuite, considérer l'intégrale sur $[\alpha, M]$...

*Exercice 12* – Linéariser, puis considérer l'intégrale sur $[x, M]$. Que se passe-t-il quand $M$ tend vers $+\infty$ ? Finalement, $I = \dfrac{3}{4}\ln 3$.

*Exercice 13* – Commencer par le changement de variable $u = x^2$ sur $[1, X]$ ; ensuite, en notant $I_n = [-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi]$, minorer $\displaystyle\int_{I_n} |f|$ par quelque chose en $1/\sqrt{n}$. Sans la valeur absolue, je proposerais bien une intégration par parties, comme dans le cours...

*Exercice 14* – Si $\ell > 0$, alors $f(t) \geqslant \dfrac{\ell}{2}t$ pour $t$ assez grand... Pour le contre-exemple, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(\mathrm{e}^{2t})$ doit convenir.

*Exercice 15* – En découpant de façon assez naturelle : $\displaystyle\int_{1/(N+1)}^{1} f = \sum_{k=1}^{N} \int_{1/(k+1)}^{1/k} f$, on trouve finalement $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right) dt = 1 - \gamma.$

*Exercice 16* – $x = \cos\theta$ et intégration par parties. Wolfram me dit : $\ln 2 - 1$.

*Exercice 17* – Bien distinguer $]0,1]$ (sur lequel l'intégrabilité vient du caractère prolongeable en une fonction continue) et $[1,+\infty[$ sur lequel l'intégrale de $\dfrac{\sin u}{u}$ est convergente après intégration par parties. Pour le caractère non convergent de la deuxième intégrale, on pourra minorer les intégrales sur $[k\pi,(k+1)\pi]$ comme dans le cours. Pour la dernière question également, une bonne évaluation de l'intégrale sur $[k\pi,(k+1)\pi]$ a un certain intérêt...

*Exercice 18* – Straightforward... On réalise le bricolage classique $\zeta(2) = I + \frac{1}{4}\zeta(2)$ en séparant les indices pairs et impairs, qui a poussé à la question bonus. Une condition supplémentaire suffisante est que la série soit à termes positifs. Ce n'est pas vraiment un résultat de cours, mais la condition de positivité est un joker raisonnable. C'est un bon exercice que de prouver l'assertion sous cette condition. Et c'est aussi un bon exercice de chercher un contre-exemple sans cette hypothèse supplémentaire.

*Exercice 19* – L'intégrale initiale est probablement la partie réelle d'une intégrale plus simple à calculer. Un calcul purement formel fournit la relation demandée, après avoir écrit le cosinus hyperbolique à l'aide d'exponentielle et un petit développement $\frac{1}{1-u} = \cdots$ Cependant la justification ne passe pas via le premier théorème auquel on pense (la série des intégrales des modules diverge). Je passerais bien par les sommes partielles puis j'appliquerais ensuite le théorème de convergence dominée.

*Exercice 20* – Je trouve la formule demandée par interversion (sans finesse), le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-t)^2}$ étant simplifié... quand on a vu que c'est une dérivée (et qu'on connaît son cours).

*Exercice 21* – Sans finesse, on trouvera : $I = 2 - \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

*Exercice 22* – Cas d'école d'interversion. Je trouve $\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$ Wolfram-Alpha aussi, ce qui est bon signe.

*Exercice 23* – Aucun des deux théorèmes auxquels vous pensez pour intervertir ne va fonctionner (pas de convergence uniforme ; pourquoi ? Et comme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |f_n(t)|\,dt$ est en $1/\sqrt{n}$...). Par contre, on peut contrôler à la main la différence entre la somme partielle et la limite candidate, avec le théorème de convergence dominée.

*Exercice 24* – $|Z|^2 = Z\overline{Z}$, puis double somme ! Pour terminer, un petit coup de convergence dominée ?

*Exercice 25* – Au nez, sans faire les calculs, je dirais : théorème de convergence dominée, changement de variable $u = t^n$ suivi d'un deuxième théorème de convergence dominée, un petit développement en série entière sur $]0,1[$ et enfin une interversion somme-intégrale !

*Exercice 26* – $u = \operatorname{th}(t)$ ; $\dfrac{1}{1-u^2} = \cdots$

*Exercice 27* – Travailler sur $[0,+\infty[$ (en multipliant par $\chi_{[0,n]}$). La domination se fait grâce à $\ln(1-u) \leqslant -u$, comme souvent.

*Exercice 28* – Convergence dominée : $\ln(1+u) \leqslant u$... donc ça tend vers $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} = 2$. Cela dit, on peut également calculer les intégrales ! $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt = n\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot$

*Exercice 29* – Pour justifier $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{n(1+k)}\right)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 (-1)^k t^{n(1+k)}dt\right)$, regrouper les termes par deux, et on a alors (avec $g_k = f_{2k} + f_{2k+1}$) : $\displaystyle\int |g_k| = O(1/k^2)$... Ensuite, $\left|\dfrac{1}{1+u} - (1-u)\right| \leqslant u^2$, donc :

$$\left|\frac{1}{kn+1} - \left(\frac{1}{kn} - \frac{1}{k^2n^2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{k^3n^3}\cdots$$

*Exercice 30* – Comme dans l'exercice précédent, l'interversion de symboles dans $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-t^3)^k$ nécessite de regrouper les termes par deux pour avoir $\displaystyle\sum_n \int_0^1 |g_n|$ convergente. Même chose pour le calcul de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$. On trouve finalement $S = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t^3)^2}dt = \frac{1}{6} - \frac{\ln 2}{9} - \frac{\pi\sqrt{3}}{27}\cdot$

*Exercice 31* – Il s'agit seulement de justifier l'interversion dans le calcul :

$$\int_2^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\int_2^{+\infty}\frac{dx}{n^x}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left[-\frac{n^{-x}}{\ln n}\right]_2^{+\infty}$$

*Exercice 32* – On traite d'abord par majoration/minoration les cas $a \neq \frac{\pi}{4}\cdot$ Pour la cas limite, $u = \tan\theta$ puis $v = u^n$. Et que de dire de la série, au passage ? *On trouvera comme équivalent :* $\frac{1}{2n}\cdot$

*Exercice 33* – C'est inclus dans un exercice traité en cours ! $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ puis $\varphi(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

*Exercice 34* – À $x$ fixé, interversion somme/intégrale par convergence uniforme (contrôle du reste d'une série alternée). En dérivant une série entière ou bien une intégrale à paramètre : $F'(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot$

*Exercice 35* – Ralala, si seulement on avait traité en détail la fonction $\Gamma$ d'Euler... Bon, je trouve $\varphi'(x) = \ln\dfrac{f(x)}{f(x-1)} = \ln x$, donc $\varphi(x) = x\ln x - x + K$, puis $\dfrac{(-1)^n}{v_n} = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n} + O\left(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right)$, d'où la convergence.

*Exercice 36* – Qu'on écrive $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(f(x+n-1) - f(x+n))$ ou qu'on développe $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^{-t})}$ puis qu'on fasse une interversion... on trouve : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(x+n)^2}\cdot$

*Exercice 37* – Ça se calcule « relativement bien », mais je ne sais pas si c'était attendu (j'ai calculé effectivement $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\ln\dfrac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x+1-\sqrt{x^2-1}} \sim \dfrac{\ln x}{x}$ pour la dernière question, n'arrivant pas à faire sans, mais je ne sais pas si j'étais dans l'esprit de l'énoncé ; j'aurais tendance à dire non !). Pour la limite en $+\infty$, on aura utilisé « la convergence dominée continue via la caractérisation séquentielle de la limite »... ou bien d'abord un argument de monotonie, avant de considérer $f(n)$, permettant de déterminer la limite dont on a prouvé précédemment l'existence.

*Exercice 38* – On localise sur $[\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, \beta]$ pour la régularité. En $+\infty$, la décroissance et la minoration par 0 nous donne l'existence d'une limite qu'on peut obtenir par convergence dominée en regardant $f(n)$. En 0, moralement on voit apparaître l'intégrale divergente $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+2t}$, donc on veut montrer :

$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Fixons $M$. Il existe $T$ tel que $\displaystyle\int_0^T \frac{dt}{1+2t} \geqslant M+1$. On utilise ensuite la continuité de $x \geqslant 0 \mapsto \displaystyle\int_0^T \frac{dt}{1+t+t^{1+x}} \cdots$ En posant $u = t^x$, je trouve (à vérifier) comme équivalent en 0 : $\dfrac{\pi}{4x}$ (attention à bien séparer $[0,1]$ et $[1,+\infty[$).

*Exercice 39* – Pour la régularité, on localise sur $[\alpha, 1]$. L'inversion de symbole se fait normalement (...). Pour le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $f$, on a intérêt à travailler sur $]-p-1,-p[$ (avec $p \in \mathbb{N}$) en commençant par mettre de côté les $p+1$ premiers termes de la série...

*Exercice 40* – $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{x-i}{x^2+1}f(x)$, puis $f(x) = K\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}(x)i/2}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$ (avec $K = \sqrt{\pi}$ accessoirement).

*Exercice 41* – $1 + xt^3 \geqslant 1 - t^3 = (1-t)(1+t+t^2)$...

*Exercice 42* – L'inégalité $\mathrm{e}^t \geqslant 1+t$ pourra servir. L'interversion somme/intégrale demande du soin : pour majorer ce qu'on imagine, j'ai utilisé $|\sin(\alpha x)| \leqslant \alpha x$. Une comparaison somme-intégrale (à $\alpha$ fixé) me donne : $I(\alpha) \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ (et l'énoncé était donc vache... si c'était le bon).

*Exercice 43* – Domination globale sans problème pour $g(x,t)$ ainsi que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ (pour $|x| \leqslant K$). Après une intégration par parties, on obtient $f' = -\dfrac{x}{2}f$. Pas de problème pour intervertir les deux symboles dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{(-xt)^{2n}}{(2n)!}dt$, après avoir calculé :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^{2n} dt = \frac{2n-1}{2} I_{n-1} = \cdots = \frac{(2n)!}{4^n n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

```
> int(exp(-t**2)*cos(x*t),t=0..infinity);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

*Exercice 44* – Domination globale par $\dfrac{1}{1+t^2}$ pour $F$, et par $\mathrm{e}^{-\varepsilon(1+t^2)}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour $F'$. On trouve alors $G' = -F'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on ajuste la constante en 0 (par continuité). On termine en faisant tendre $x$ vers $+\infty$, avec une petite convergence dominée pour $F(x)$.

*Exercice 45* – $D_F = ]0, +\infty[$. Pour $\lambda \in [A, +\infty[$, on domine sans mal $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\right| = \left|\mathrm{e}^{-\lambda x}\right|$ par $\mathrm{e}^{-Ax}$, puis $F$ est $\mathcal{C}^1$, avec $F'(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\cdot$ L'intégrale demandée vaut $F(b) - F(a) = \ln \frac{b}{a}\cdot$

*Exercice 46* – Déjà, $xF(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(u/x)\mathrm{e}^{-u}du$, et $\ell = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ell \mathrm{e}^{-u}du$. Pour montrer que la différence tend vers 0 en $0^+$, on prend une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $0^+$, et on montre que $F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par convergence dominée. On termine par caractérisation séquentielle de la limite.