DM 9 – e3a MP2 2018

Corrigé écrit par Christophe Devulder – et retouché à la marge par mes soins

Partie I

1. Si $a = b$ alors $a_0 = b_0 = a$.
Si $a_n = b_n = a$ alors $a_{n+1} = b_{n+1}$ (en particulier car $\sqrt{a^2} = |a| = a$).
On en déduit par récurrence que

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont constantes égales à } a}$$

2. Soient $x, y \geq 0$. On a $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x, y \geq 0, \qquad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}$$

3. Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \geq 0$. Avec la question précédente, on a donc pour tout n, $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n \leq b_n$$

Soit $n \geq 1$. On a $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$ et $b_{n+1} \leq \frac{2b_n}{2} = b_n$. Ceci montre que

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ croît et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroît}}$$

Comme $a_n \leq b_n$ pour $n \geq 1$, les suites sont donc dans $[a_1, b_1]$ à partir du rang 1 et donc bornées (bornée équivaut à bornée à partir d'un certain rang).

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées}}$$

4. Par théorème de limite monotone, les suites sont convergentes à limite ℓ_a et ℓ_b dans $[a_1, b_1]$ et donc > 0. En pasant à la limite dans la relation de récurrence pour (b_n), on obtient $\ell_a = \ell_b$.

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes de même limite}}$$

5. Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $a'_0 = b$ et $b'_0 = a$. On a alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$. Comme les suites sont récurrentes d'ordre 1, elles sont égale à partir du rang 1 et donc de même limite.
De même, Notons (α_n) et (β_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $\alpha_0 = \lambda a_0$ et $\beta_0 = \lambda b$. On a alors $\alpha_1 = \lambda a_1$ et $\beta_1 = \lambda b_1$ puis, par récurrence simple, $\alpha_n = \lambda a_n$ et $\beta_n = \lambda b_n$ pour tout n. Finalement,

$$\boxed{M(b, a) = M(a, b) \text{ et } \forall \lambda > 0,\ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)}$$

6. On utilise ceci avec $\lambda = 1/a > 0$: $\frac{1}{a}M(a, b) = M(1, b/a) = f(b/a)$. On a donc

$$\boxed{M(a, b) = af\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Partie II

7. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et équivalente au voisinage des infinis à $1/t^2$ et donc intégrable sur de tels voisinages. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. A fortiori,

$$\boxed{I(a,b) \text{ et } J(a,b) \text{ existent}}$$

La fonction ci-dessus étant paire, son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut celle sur $\mathbb{R}^-$ (par exemple en effectuant le changement de variable $x = -t$). Ainsi, par relation de Chasles

$$\boxed{J(a,b) = 2I(a,b)}$$

8. L'application $\varphi : s \mapsto \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ de dérivée $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) > 0$: elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{0^+}\varphi, \lim\limits_{+\infty}\varphi[= \mathbb{R}$. On réalise alors le changement de variable $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$ dans l'intégrale déjà prouvée convergente. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4s^2}(s^2-ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^2(a+b)^2 + (s^2-ab)^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^4 + (a^2+b^2)s^2 + a^2b^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+a^2)(s^2+b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{ab})^2 + t^2 &= ab + \frac{1}{4s^2}(s^2-ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+ab)^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les conventions d'écriture usuelles

$$dt = \frac{ds}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) = \frac{ds}{2s^2}(s^2+ab)$$

On en déduit que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{a^2+s^2)(b^2+s^2)}} = J(a,b)$$

et donc, avec la question précécente

$$\boxed{J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a,b)}$$

9. On prouve ce résultat par récurrence.
   - <u>Initialisation</u> : c'est vrai pour $n = 0$ car $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
   - <u>Hérédité</u> : si le résultat est vrai au rang n alors comme la question précédente donne

$$2I(a_{n+1}, b_{n+1}) = J(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2I(a_n, b_n)$$

     le résultat reste vrai au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I(a_n, b_n) = I(a,b)}$$

10. On veut passer à la limite ci-dessus et, pour cela, utiliser un théorème d'interversion limite-intégrale. On propose le théorème de convergence dominée.
   - $f_n\ :\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   - La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ elle même continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - Comme pour tout $n \geq 1$ on a $a_n, b_n \geq a_1 > 0$ (partie I) on en déduit que

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f_n(t)| \leq \frac{1}{a_1^2 + t^2}$$

     Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et indépendant de n).

   Le théorème s'applique et donne

$$\boxed{I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)}$$

11. On remarque que

$$\forall \alpha > 0,\ I(\alpha, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \alpha^2} = \left[\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

   Ainsi, avec la question 10,

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

   ou encore

$$\boxed{M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}}$$

Partie III

12. L'application $s \mapsto x/s$ est une bijection de classe C^1 de $]0, \sqrt{x}]$ sur $[\sqrt{x}, +\infty[$; on peut donc réaliser le changement de variable dans l'intégrale convergente :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} &= \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} \frac{(-x/s^2)\ ds}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}} \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}\end{aligned}$$

   Par relation de Chasles, on a

$$I(1,x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}$$

   On conclut ainsi que

$$\boxed{\forall x > 0,\ I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\ dt}$$

13. Tout d'abord :

$$\left|I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| = 2\left|\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right)\right| \leq 2\int_0^{2\sqrt{x}} \frac{\left|\sqrt{1+t^2}-1\right|}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}dt$$

Par inégalité des accroissements finis (la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est majorée par $1/2$ sur $[1, +\infty[$) on a $\left|\sqrt{1+t^2}-1\right| \leq t^2/2$ et d'autre part au dénominateur $\sqrt{1+t^2} \geq 1$, de sorte que

$$\frac{\left|\sqrt{1+t^2}-1\right|}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} \leq \frac{t^2}{2\sqrt{x^2+t^2}} \leq \frac{x}{2\sqrt{x^2+t^2}}$$

(car $t \leq \sqrt{x}$ donc $t^2 \leq x$).
En recollant les morceaux, on a donc :

$$\left|I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt\right| \leq x \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

On en conclut donc que

$$\boxed{I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt \text{ est négligeable devant } 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$$

14. La dérivée de $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Par changement de variable linéaire $s = t/x$ (C^1 bijectif entre $[0, \sqrt{x}]$ et $[0, 1/\sqrt{x}]$), on a

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{ds}{1+s^2} = \left[\ln(s+\sqrt{1+s^2})\right]_0^{1/\sqrt{x}}$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

15. On a

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = -\frac{\ln(x)}{2} + \ln(1+\sqrt{x+1})$$

qui équivaut à $-\ln(x)/2$ quand $x \to 0^+$.
Or, d'après la question 13, quand $x \to 0$

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt$$

On en déduit avec la question 14 que

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

Comme $f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}$, on a ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}}$$

16. On a (avec la partie I)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(1, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}M(x,1) = \frac{1}{x}M(1,x) = \frac{1}{x}f(x)$$

Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0^+$ et la question précédente donne alors

$$f\,(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi x}{2\ln(1/x)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}}$$

17. On sait que
$$\forall x>0,\ f(x)=M(1,x)=\frac{\pi}{2I(1,x)}$$
On va alors prouver que $x\mapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x>0,\ t\mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall t>0,\ x\mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall [a,b]\subset\mathbb{R}^{+*},\ \forall x\in[a,b],\ \forall t>0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(a^2+t^2)}}$. On a vu en question 7 que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Le théorème évoqué donne $x\mapsto I(1,x)\in C^0(\mathbb{R}^{+*})$ et ainsi (théorèmes d'opération)
$$\boxed{f\in C^0(\mathbb{R}^{+*})}$$

18. La question 15 donne $f(x)\to 0$ quand $x\to 0^+$ et donc
$$\boxed{\text{On prolonge } f \text{ par continuité en posant } f(0)=0}$$
On a aussi
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2x\ln(x)} \to +\infty$$
$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale}}$$

19. Avec la question 16,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$
Au voisinage de $+\infty$, on a ainsi une direction asymptotique horizontale. Comme f est de limite infinie en $+\infty$ (toujours la question 16)
$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente en } +\infty \text{ une branche parabolique horizontale}}$$

20. L'expression de $I(1,x)$ montre que si $0\le x\le y$, $I(1,x)\ge I(1,y)$. $x\mapsto I(1,x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs >0. Ainsi, avec l'expression rappelée en question 17, $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$.

Partie IV

21. Avec les questions 7 et 8,
$$I(1,x)=I\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{x}\right)$$
On utilise alors la question 5 avec $\lambda=\frac{1+x}{2}$:
$$M\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{x}\right)=\frac{1+x}{2}M\left(1,\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$
On conclut alors avec la question 11 (utilisée deux fois) que

$$\boxed{I(1,x)=\frac{2}{1+x}I\left(1,\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}$$

22. (a) On a $w_{n+1}=h(w_n)$ avec $h(t)=\frac{2\sqrt{t}}{1+t}$. Comme $h(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$ et $w_0\in\mathbb{R}^+$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad w_n\geq 0$$

h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(t)$ est du signe de $\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}(1-x)$, donc h est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$ (et on note que 1 est point fixe). Les variations de h nous assurent que $w_1\in[0,1]$. Puis, comme l'intervalle $[0,1]$ est stable par h (qui est croissante entre deux points fixe...), tous les w_n appartiennent à $[0,1]$. Mais sur cet intervalle $h(t)\geq t$ (on s'en convainc en essayant de représenter le graphe de h, et on le prouve... comme on veut !), donc $w_{n+1}=h(w_n)\geq w_n$: la suite (w_n) est croissante, majorée (par 1), donc convergente vers $\ell\in\mathbb{R}_+$ vérifiant $h(\ell)=\ell$ (trois arguments usuels), donc (après mise au carré et agitation de bras) $\ell=0$ ou $\ell=1$. L'inégalité $w_n\geq w_1$ passée à la limite fournit $\ell\geq w_1$, or $w_1>0$, donc $\ell=1$.

$$\boxed{(w_n)\text{ converge vers }1}$$

(b) On procède par récurrence.

- Initialisation : la question 21 donne $I(1,x)=\frac{2}{1+x}I(1,w_1)$, ce qui correspond à la formule pour $n=0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang $n\geq 0$. La question 21 donne

$$I(1,w_{n+1})=\frac{1}{2+w_{n+1}}I(1,w_{n+2})$$

Par le résultat au rang n, on déduit celui au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ I(1,x)=I(1,w_{n+1})\prod_{k=0}^{n}\frac{2}{1+w_k}}$$

(c) On a vu en question 17 que $x\mapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, $I(1,w_{n+1})\to I(1,1)=\frac{\pi}{2}$. On en déduit que (p_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{\pi}{2I(1,x)}$$

$$\boxed{\text{En notant }\ell\text{ la limite de }(p_n)\text{, on a }\ell I(1,x)=\tfrac{\pi}{2}}$$

Partie V

23. Soit $x\in]-1,1[$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a donc $|x\sin(t)|<1$ et donc $1-x^2\sin^2(t)>0$. Ainsi, $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$ et son intégrale sur ce segment existe donc.

$$\boxed{K\text{ est bien définie sur }]-1,1[}$$

24. Dans l'intégrale convergente $I(x)$, on réalise le changement de variable $t \mapsto \arctan(t)$ qui est C^1 et bijectif de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Il donne

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1/\cos^2(s)}{\sqrt{(1+\tan^2(s))(x^2+\tan^2(s))}}\, ds \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{x^2\cos^2(s)+\sin^2(s)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}}$$

25. Comme $\sin^2 = 1-\cos^2$, on a donc

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-(1-x^2)\cos^2(t)}}$$

Le changement affine $u = \pi/2 - t$ donne alors

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2(u)}}$$

Quand $x \in]0,1[$, $1-x^2 > 0$ donc est égal au carré de sa racine carrée et ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ I(1,x) = K(\sqrt{1-x^2})}$$

26. (a) On a

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)(1-\sin^2(t))\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin^{2n}(t)\cos(t)\, dt$$

$u'(t) = \cos(t)\sin^{2n}(t)$ se primitive en $u(t) = \frac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}(t)$ et $v(t) = \cos(t)$ se dérive en $v'(t) = -\sin(t)$. $u, v \in C^1([0,\pi/2])$ et on peut intégrer par parties pour obtenir

$$W_n - W_{n+1} = [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)\, dt = \frac{1}{2n+1} W_{n+1}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n}$$

(b) On prouve le résultat par récurrence.

- <u>Initialisation</u> : $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et le résultat est vrai au rang 0.
- <u>Hérédité</u> : on suppose le résultat vrai au rang n. Avec la question précédente, et en écrivant $\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}$,

$$W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}\pi$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi}$$

27. Le cours nous dit que $g \ : \ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est DSE de rayon 1. Son développement est alors donné par Taylor :

$$\forall t \in]-1,1[,\ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

On montre par récurrence que

$$g^{(n)}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} (1-t)^{-\frac{2n+1}{2}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} (1-t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$\boxed{\forall t \in]-1,1[,\ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n}$$

On pouvait aussi voir $(1+u)^{-1/2}$*, puis agiter les bras sur* $\binom{-1/2}{n}$

28. Il nous suffit alors d'appliquer l'égalité en $(x\sin(t))^2$ (qui est dans $]-1,1[$) :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)}$$

29. A ce niveau, on a

$$\forall x \in]-1,1[,\ K(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)\ dt$$

On veut intervertir les symboles. On va utiliser le théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions (i.e. : le TCD pour les sommes partielles de la série). Ici, $x \in]-1,1[$ est fixé.

- $f_n \ : \ t \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$ est le terme général d'une série de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,\pi/2]$ vers $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$ elle même continue.
- Comme les fonctions sont positives,

$$\forall t \in [0,\pi/2],\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$$

  Le majorant est continu sur le segment $[0,\pi/2]$ et donc intégrable sur ce segment.

Le théorème s'applique et donne

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} W_n$$

Il reste à utiliser l'expression de W_n pour conclure que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}}$$

30. On a

$$M(3,5) = M(5,3) = 5M(1,3) = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{I(1,3/5)} = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{K(4/5)}$$

On déduit $M(3,5)$ de $K(4/5)$ dont on a une expression sous forme de somme de série numérique.

Rapport sur l'epreuve de Mathématiques 2 MP

Présentation du sujet

L'épreuvea une durée de 3 heures et consiste en un problème. Le but du problème est d'obtenir quelques résultats sur la moyenne arithmético-géométrique de 2 nombres, en particulier une expression de celle-ci sous forme d'une série numérique.

Le sujet se découpe en 5 parties:

1. Etude des suites adjacentes définissant la moyenne arithmético-géométrique.
2. Expression sous forme d'une intégrale de la moyenne arithmético-géométrique.
3. Etude de quelques propriétés de l'intégrale introduite en partie II.
4. Expression sous forme d'un produit infini de la moyenne arithmético-géométrique.
5. Expression sous forme d'une série numérique.

On utilise de nombreux points du programme d'analyse de première et deuxième année (Suites, convergence dominée, interversion de signes sommes, calcul d'intégrales et de primitives)

Analyse générale

Beaucoup de candidats oublient de parler de récurrence en particulier en partie I. De nombreux candidats pensent aux suites adjacentes, mais l'enchainement logique des arguments pour justifier la convergence des suites est souvent incorrect.

La majorité des candidats calculent correctement la différentielle pour le premier changement de variable, mais très peu terminent la vérification de l'ensemble des hypothèses, en particulier calcul des nouvelles bornes.

Les hypothèses de la convergence dominée sont connues de la majorité des candidats, mais leur vérification est rarement faite rigoureusement, la fonction majorante donnée étant fréquemment non intégrable.

Dans la partie III, la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est souvent connue, une partie seulement des candidats prend le temps de la justifier en. utilisant les indications de l'énoncé.

Beaucoup trop de candidats essaient de justifier la continuité d'une fonction en utilisant la continuité de l'équivalent.

Le manque d'honnêteté semble répandu parmi les candidats, celui-ci étant facilité par le fait que les résultats étaient souvent donnés dans l'énoncé.

La présentation des copies était plutôt moins satisfaisante que les années précédentes, tout en restant correcte. Quelques copies laissaient toutefois à désirer et ont été sanctionnées.

Conseils aux futurs candidats:

- Prenez le temps de lire l'énoncé. Réfléchissez à la cohérence du sujet.
- Vérifier soigneusement les hypothèses des théorèmes utilisés (Par exemple sur la convergence dominée et les commutations de limites).
- Si vous connaissez le résultat d'une question, prenez le temps de le justifier précisément.
- Soyez rigoureux dans l'enchaînement logique de vos arguments.
- Privilégiez la qualité de vos réponses aux nombres de questions traitées, une bonne copie n'a pas forcément tout fait.