MINES-PONTS MATH 2 PC 2019
PROPOSITION de CORRIGÉ

Partie I. Préliminaires

1. Posons $u_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, alors chaque fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente), ceci prouve la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, la fonction somme R est alors définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $v : x \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $v(0) = 1$, d'où son intégrabilité sur $]0,1]$. Pour $x \geq 1$, on a $\big|v(x)\big| \leq \dfrac{1}{x^2}$ avec $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$, donc v est aussi intégrable sur cet intervalle. Finalement, v est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est (absolument) convergente.

3. Posons $w(x,t) = f(t)\,e^{-ixt}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Alors $t \mapsto w(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto w(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a la domination $\big|w(x,t)\big| = \big|f(t)\big|$ avec f intégrable sur $\mathbb{R}$. Du théorème de continuité des intégrales à paramètre, on déduit l'existence et la continuité sur $\mathbb{R}$ de $\hat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Partie II. Étude de la dérivabilité de R en 0

4. De $\big|f(nh)\big| \leq \dfrac{C}{n^2h^2+1}$, on déduit la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geq 0} f(nh)$, donc l'existence de $S(h)$.

5. L'application φ_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. En effet,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \big[kh,(k+1)h\big[\qquad \varphi_h(t) = f(kh)\ ,$$

donc φ_h est continue (car constante) sur $\big]kh,(k+1)h\big[$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \lim_{t\to(kh)^+} \varphi_h(t) = \varphi_h(kh) = f(kh)\ ;$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \lim_{t\to(kh)^-} \varphi_h(t) = f\big((k-1)h\big)\ ,$$

il y a donc une limite à gauche et une limite à droite finies en les points kh, $k \in \mathbb{N}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{nh} \varphi_h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \varphi_h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} h\,f(kh) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad S(h).$

Par ailleurs, la fonction φ_h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \big|\varphi_h(t)\big| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h\right)\right| \leq \frac{C}{1+\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor^2 h^2}\ ,$$

et la fonction majorante, équivalente à $t \mapsto \dfrac{C}{t^2}$ en $+\infty$, est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nh} \varphi_h(t)\,\mathrm{d}t = S(h)$.

6. Si $h \in]0,1]$ et $t \in [1,+\infty[$, alors $\left\lfloor \dfrac{t}{h}\right\rfloor h \geq \left(\dfrac{t}{h}-1\right) h = t-h \geq t-1 \geq 0$, donc

$$\big|\varphi_h(t)\big| \leq \frac{C}{1+\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor^2 h^2} \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}\ .$$

7. Soit (h_n) une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, on va prouver par convergence dominée que $S(h_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on en déduira par caractérisation séquentielle de la limite que $\displaystyle\lim_{h\to 0} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. On pourra supposer que $h_n \in]0,1]$, ce qui est toujours vrai à partir d'un certain rang.

• Les fonctions φ_{h_n} sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

• On a

$$t - h_n = \left(\frac{t}{h_n} - 1\right) h_n \leq \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \leq \frac{t}{h_n} h_n = t$$

donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n = t$, puis $\varphi_{h_n}(t) = f\left(\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$ par continuité de f, on a donc convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions (φ_{h_n}) vers la fonction continue f.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|\varphi_{h_n}(t)| \leq C$, et pour $t \geq 1$, on peut utiliser la majoration démontrée en **6.**, on a finalement la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad |\varphi_{h_n}(t)| \leq \alpha(t)\ ,$$

avec $\alpha(t) = \begin{cases} C & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \dfrac{C}{1+(t-1)^2} & \text{si } \quad t \geq 1 \end{cases}$, fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée s'applique donc et conduit au résultat annoncé au début de cette question.

8. La fonction $f : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

L'application $t \mapsto |(t^2+1)f(t)|$ est continue donc bornée sur le segment $[-1,1]$, et pour $|t| \geq 1$ on a $t^2 + 1 \leq 2t^2$ donc $|(t^2+1)f(t)| \leq 2$, donc f satisfait les hypothèses posées en chapeau de cette partie II. Ainsi,

$$S(h) = h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = h\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2h^2)}{n^2h^2}\right) = h + \frac{1}{h}\,R(h^2) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .$$

Donc $R(h^2) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,h$ lorsque $h \to 0^+$. En posant $h = \sqrt{x}$, on a $R(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi x}{2}}$ lorsque $x \to 0^+$. Donc $\dfrac{R(x)-R(0)}{x-0} = \dfrac{R(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, et la fonction R n'est pas dérivable en 0.

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

9. Pour n entier relatif et x réel, posons $f_n(x) = f(x+2n\pi)$. On a alors $|f_n(x)| \leq \dfrac{C_1}{(x+2n\pi)^2+1}$, ce qui entraîne la convergence absolue des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_{-n}(x)$, donc l'existence de $F(x)$. On a, par décalage d'indice,

$$F(x+2\pi)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} f\big(x+2(n+1)\pi\big)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+2n\pi)=F(x)\ ,$$

la fonction F est donc 2π-périodique.

Il suffit alors de montrer la continuité de F sur le segment $S=[0,2\pi]$. Chaque fonction f_n est continue sur S, et on a

$$\forall x\in S\quad \forall n\in\mathbb{N}\qquad \big|f_n(x)\big|\le \frac{C_1}{(x+2n\pi)^2+1}\le\frac{C_1}{4\pi^2n^2+1}\ .$$

Comme ce majorant est le terme général d'une série convergente indépendante de x, on a prouvé la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\ge 0} f_n$ sur S. On procède de même pour la série de fonctions $\sum_{n\ge 1} f_{-n}$, en écrivant

$$\forall x\in S\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \big|f_{-n}(x)\big|\le \frac{C_1}{(x-2n\pi)^2+1}\le\frac{C_1}{4\pi^2(n-1)^2+1}$$

et on a aussi la convergence normale sur S de cette série. Il en résulte la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

10. Pour n entier relatif et x réel, posons $g_n(x)=\hat f(n)\,e^{inx}$. Alors chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall n\in\mathbf{Z}\quad \forall x\in\mathbb{R}\qquad \big|g_n(x)\big|=\big|\hat f(n)\big|\le\frac{C_2}{n^2+1}\ ,$$

ce qui donne directement la convergence normale sur $\mathbb{R}$ des séries $\sum_{n\ge 0} g_n$ et $\sum_{n\ge 1} g_{-n}$. Il en résulte que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, chaque fonction g_n est 2π-périodique, donc G aussi.

11. D'après la propriété admise en chapeau de cette partie, pour montrer l'égalité $G=2\pi F$, il suffit de montrer que l'on a $c_p(G)=c_p(2\pi F)$, soit $c_p(G)=2\pi\,c_p(F)$ pour tout p entier relatif. Or,

$$c_p(G)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat f(n)\,e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat f(n)\int_0^{2\pi}e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t=\hat f(p)$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\mathrm{d}t=2\pi\delta_{n,p}$, l'interversion série-intégrale étant autorisée par la convergence normale sur le segment $[0,2\pi]$ de la série de fonctions $\sum h_n$ avec $h_n(t)=\hat f(n)\,e^{i(n-p)t}$, on a en effet $\|h_n\|_\infty=\big|\hat f(n)\big|\le\dfrac{C_2}{n^2+1}$.

D'autre part,

$$c_p(F)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(t+2n\pi)\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$$

car la série de fonctions $\sum k_n$, avec $k_n(t) = f(t+2n\pi)\, e^{-ipt}$, converge aussi normalement sur le segment $[0, 2\pi]$ car $\big|k_n(t)\big| = \big|f(t+2n\pi)\big| \leq \dfrac{1}{(t+2n\pi)^2+1} \leq \dfrac{1}{4n^2\pi^2+1}$ pour n positif, et on adapte pour n négatif (*cf.* corrigé de la question **9.**).

On obtient alors, par translation de la variable puis relation de Chasles,

$$\begin{aligned} c_p(F) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)\, e^{-ip(u-2n\pi)}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)\, e^{-ipu}\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-ipu}\, \mathrm{d}u = \frac{\hat{f}(p)}{2\pi} = \frac{c_p(F)}{2\pi}\,. \end{aligned}$$

On conclut que $G = 2\pi F$.

12. Posons $g(t) = f\Big(\dfrac{at}{2\pi}\Big)$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto (t^2+1)g(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée au voisinage de $\pm\infty$ en vertu de la majoration $\big|(t^2+1)g(t)\big| \leq C_1 \dfrac{t^2+1}{\Big(\dfrac{at}{2\pi}\Big)^2+1}$.

Alors $\hat{g}(x) = \dfrac{2\pi}{a}\, \hat{f}\Big(\dfrac{2\pi}{a}x\Big)$ par un changement de variable linéaire dans l'intégrale de définition, et la fonction $x \mapsto (x^2+1)\,\hat{g}(x)$ est aussi bornée pour des raisons similaires.

On peut donc appliquer le résultat de la question **11.**, soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{g}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} g(2n\pi)$, ce qui donne bien la relation

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{a}\Big)\,.$$

Partie IV: Étude de la dérivabilité de R en π

13. Pour tout t réel (y compris pour $t = 0$), on a $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k}{k!}\, t^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{k+1}}{(k+1)!}\, t^{2k}$. La fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après le cours.

14. Pour $t \neq 0$, on calcule

$$f'(t) = \frac{2i\, e^{it^2}}{t} - \frac{2\left(e^{it^2}-1\right)}{t^3}\,, \qquad \text{puis} \qquad f''(t) = -4e^{it^2} - \frac{6i\, e^{it^2}}{t^2} + \frac{6\left(e^{it^2}-1\right)}{t^4}\,.$$

Comme $\left|e^{it^2}\right| = 1$, on a immédiatement $f'(t) \to 0$ et $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ lorsque $t \to \pm\infty$.

15. La fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire, elle est donc intégrable sur le segment $[-1, 1]$ et, pour montrer la (semi)-convergence de l'intégrale proposée, il suffit de montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\, \mathrm{d}x$. Or, si $A \in [1, +\infty[$, le changement de variable $x = \sqrt{t}$ puis une intégration par parties donnent

$$\int_1^A e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{i}{2}\,\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\right]_1^{A^2} - \frac{i}{4}\int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t\ .$$

L'expression entre crochets tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $O\big(t^{-3/2}\big)$ en $+\infty$, chacun des deux termes issus de l'intégration par parties admet donc une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale généralisée I.

16. Pour x réel non nul, on intègre par parties:

$$\hat{f}(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{i}{x}\,f(t)\,e^{-ixt}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \frac{i}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Le terme entre crochets est nul car $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$. On recommence:

$$\hat{f}(x) = -\frac{i}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x^2}\,f'(t)\,e^{-ixt}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\ .$$

Le terme entre crochets est de nouveau nul car $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$. Posons maintenant $r(t) = f''(t) + 4e^{it^2}$. La question **14.** nous apprend que $r(t) = O(t^{-2})$ en $\pm\infty$. Cette fonction r, qui est continue sur $\mathbb{R}$, est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$\hat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2-xt)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\ .$$

La mise sous forme canonique du trinôme $t^2 - xt$ montre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2-xt)}\,\mathrm{d}t = I\,e^{-i\frac{x^2}{4}}$.

Finalement,

$$\big|\hat{f}(x)\big| \le \frac{1}{x^2}\left(4\,|I| + \int_{-\infty}^{+\infty} \big|r(t)\big|\,\mathrm{d}t\right),$$

ce qui montre que $\hat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

17. Les fonctions f et $\hat{f}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et sont $O(t^{-2})$ en $\pm\infty$ (ce qui, pour une fonction continue sur $\mathbb{R}$, entraîne que $t \mapsto (t^2+1)f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et pareillement pour $\hat{f}$), on peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson obtenue dans la partie III. avec $a = \sqrt{x}$, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f\big(n\sqrt{x}\big) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)\ ,$$

soit

$$i + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} - 1}{n^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\hat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)\right)$$

en séparant les termes pour $n=0$ et en remarquant que la fonction f est paire, et $\hat{f}$ aussi en conséquence. Poursuivons:

$$i+\frac{2}{x}\big(F(x)-F(0)\big)=\frac{\hat{f}(0)}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)$$

soit

$$F(x)=F(0)+\frac{\sqrt{x}}{2}\,\hat{f}(0)-\frac{i}{2}\,x+\sqrt{x}\,s(x)\ ,$$

avec $s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)$. Il reste à prouver que $s(x)=O(x)$ lorsque $x\to 0^+$. Or, il existe $C>0$ tel que $\big|\hat{f}(t)\big|\leq\dfrac{C}{t^2+1}$ pour tout réel t, ainsi $\left|\hat{f}\Big(\dfrac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)\right|\leq\dfrac{C}{1+\dfrac{4n^2\pi^2}{x}}\leq\dfrac{Cx}{4n^2\pi^2}$, puis

$$\big|s(x)\big|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\hat{f}\Big(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\Big)\right|\leq\frac{C}{4\pi^2}\,\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big)\ x\ ,$$

ce qui suffit. On a donc $F(x)=F(0)+\dfrac{\hat{f}(0)}{2}\,\sqrt{x}-\dfrac{i}{2}\,x+O(x^{3/2})$, soit le développement demandé avec $b=-\dfrac{i}{2}$ et $a=\dfrac{\hat{f}(0)}{2}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$. On peut exprimer cette intégrale en fonction de I: en effet, le calcul de f' réalisé à la question **14.** montre que $tf'(t)=2i\,e^{it^2}-2f(t)$, ce que l'on peut écrire sous la forme $f(t)+\Big(f(t)+t\,f'(t)\Big)=2i\,e^{it^2}$, puis en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$ (toutes les fonctions sont intégrables sur $\mathbb{R}$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t+\big[t\,f(t)\big]_{-\infty}^{+\infty}=2i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t\ ,$$

soit (le terme entre crochets est nul): $\hat{f}(0)=2iI$, puis $a=iI$.

18. On a $F(\pi+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2(\pi+x)}}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2\pi}\,e^{in^2x}}{n^2}$. Or, l'entier n^2 est de même parité que n, donc $e^{in^2\pi}=(-1)^n$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs (la série est absolument convergente), on écrit

$$\begin{aligned}F(\pi+x)&=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{e^{i4p^2x}}{4p^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{e^{i(2p+1)^2x}}{(2p+1)^2}\\&=\frac{1}{4}F(4x)-\Big(F(x)-\frac{1}{4}F(4x)\Big)\ =\ \frac{1}{2}F(4x)-F(x)\ .\end{aligned}$$

19. On a $R(x)=\mathrm{Im}\big(F(x)\big)$. Or, la fonction F admet un développement limité à l'ordre 1 "au voisinage à droite" du point π puisque, des questions **17.** et **18.**, on tire, pour $x>0$,

$$F(\pi+x)=\frac{1}{2}\Big(F(0)+2a\sqrt{x}+4bx+O(x^{3/2})\Big)-\Big(F(0)+a\sqrt{x}+bx+0(x^{3/2})\Big)\ ,$$

d'où $F(\pi+x) = -\dfrac{1}{2}F(0) + bx + o(x) = -\dfrac{1}{2}F(0) - \dfrac{i}{2}\,x + o(x)$ et, en prenant la partie imaginaire, $R(\pi+x) = -\dfrac{1}{2}\,x + o(x)$ lorsque $x \to 0^+$. Enfin, la fonction $x \mapsto R(\pi+x)$ étant impaire, on conclut que $R(\pi+x) = -\dfrac{1}{2}\,x + o(x)$ lorsque $x \to 0$. Donc R admet un développement limité à l'ordre 1 au point π, et est donc dérivable en ce point avec $R'(\pi) = -\dfrac{1}{2}$.

Question 11. La première partie, qui n'est qu'un développement limité simple, a reçu très peu de réponses correctes. La suite, délicate, a été peu abordée et n'a presque jamais donné lieu à des réponses valables.

Question 12. Beaucoup d'erreurs dans les calculs asymptotiques, du type :« $\lfloor x \rfloor$ est équivalent à $\lfloor x \rfloor+k$, donc $\lfloor x \rfloor!$ est équivalent à $(\lfloor x \rfloor+k)!$ ». Les réponses utilisant la formule de Stirling ont rarement été convaincantes ; cette méthode est ici (comme pour Q1) assez maladroite.

Question 13. Pour la première partie, beaucoup de candidats donnent des réponses fausses, en invoquant la décroissance de la suite, qui contredit pourtant le résultat de Q10 !

Question 14. Cette question n'a été bien traitée que dans peu de copies.

Question 15. Cette question, souvent abordée, a été bien traitée dans une petite moitié des copies.

Questions 16 et17. Les calculs assez subtils de ces questions ont été abordés dans quelques excellentes copies. Quelques candidats ont par ailleurs grappillé des points sur les conclusions, qui étaient très simples.

Question 18. Question souvent abordée, mais rarement traitée dans son intégralité. La relation de récurrence est en général obtenue, l'expression de c_n ne suit pas toujours. La justification des calculs (dérivation d'une série entière sur l'inter- valle ouvert de convergence) est rarement mentionnée.

Question 19. Il s'agissait d'appliquer la formule de Stirling. Une partie des candidats l'a vu et a cité correctement la formule. Plus rares sont ceux qui ont mené la question à son terme.

Question 20. Cette ultime question n'était pas difficile pour qui avait compris la logique du texte ; elle a reçu quelques bonnes réponses.

1.5. Mathématiques II — PC

Le sujet de la deuxième épreuve PC était consacré à l'étude d'une somme de série de fonctions, que Riemann aurait proposée, dans les années 1860, comme exemple de fonction partout continue et nulle part dérivable. En réalité, les travaux de Hardy (1916) et de Gerver (1968) ont permis de montrer que la fonction R de l'énoncé est dérivable exactement en les réels de la forme πr, où r est un rationnel à numérateur et dénominateur tous deux impairs.

L'énoncé se limitait à montrer la non-dérivabilité de R en 0 par des moyens élémentaires, et sa dérivabilité en π par une méthode basée sur l'utilisation de la formule sommatoire de Poisson. Il avait été conçu :

> — pour mettre en œuvre une grande partie du programme d'analyse de deuxième année,
> — pour mettre en valeur les candidats ayant une bonne connaissance du cours et des méthodes de base du programme.

C'est ainsi que la première partie était constituée uniquement de questions très élémentaires, applications directes des théorèmes du cours. Ces questions ont été significativement valorisées dans le barème. Bien entendu, pour obtenir tous les points, il fallait vérifier soigneusement toutes les hypothèses des théorèmes utilisés, et ne pas oublier les valeurs absolues ou les modules, qui y jouaient un rôle central.

Peut-être parce qu'il abordait des thèmes sur lesquels la majorité des candidats est très entraînée et assez à l'aise, ce problème a été mieux réussi que ceux des années précédentes. Parmi les motifs de satisfaction du jury, notons une bonne compréhension assez générale de la notion de convergence absolue (des séries et des intégrales), qui était au cœur du sujet.

Parmi les points à consolider, le jury regrette le manque de familiarité avec l'exponentielle complexe d'un trop grand nombre de candidats, qui se sentent obligés de revenir systématiquement aux fonctions *cos* et *sin*. Ce choix regrettable est souvent générateur de perte de temps, la fonction exponentielle se comportant de façon bien plus agréable à de nombreux égards !

Passons à l'examen détaillé des questions.

Question1. Le plus efficace était de montrer la convergence normale de la série (qui implique sa convergence simple, donc l'existence de la fonction *R*), sans oublier de mentionner la continuité du terme général. Certains candidats rédigent cette question de façon trop elliptique, concluant directement à la continuité de la fonction *R* à partir de la majoration de $\left|\frac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et de la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$, sans citer la *notion* de convergence normale.

Question 2. Cette question a été en général plutôt bien traitée (prolongement continu en 0 et convergence absolue sur *[1 ; +∞ [*. Il fallait évidemment prendre garde à ne pas affirmer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

Question 3. Le théorème de continuité sous le signe intégrale montre à la fois la bonne définition de la fonction $\hat{f}$ et sa continuité. Ici encore, le rôle des valeurs absolues était décisif, et le jury a trop souvent lu des inégalités entre nombres complexes.

Question 4. Certains candidats croient montrer l'existence de la somme *S(h)* en majorant... *|S(h)|*. Heureusement, l'argument de convergence absolue a très souvent été donné.

Question 5. De très nombreux candidats ont décelé dans cette question une analogie avec les sommes de Riemann, à ceci près que l'intégrale de ϕ_h doit être vue ici comme une somme de Riemann (certes sur un intervalle non borné), et non une limite de sommes de Riemann. Pour rédiger correctement les choses, il fallait d'abord noter que la fonction ϕ_h est constante sur chaque intervalle $[nh; (n+1)h[$, $(n \in \mathbb{N})$ puis utiliser la relation de Chasles.

Question 6. Cette question a donné lieu à des inégalités folkloriques ($x \leq \lfloor x \rfloor$), voire ouvertement malhonnêtes, qui ont été inévitablement sanctionnées. Les correcteurs ont été attentifs à une utilisation correcte de la partie entière ($\lfloor x \rfloor \geq x-1$) et au rôle de la précision $h \leq 1$.

Question 7. Un grand nombre de candidats a pensé à utiliser le théorème de convergence dominée (sans, hélas, toujours le nommer, cf. la question 1), dont il fallait bien sûr vérifier soigneusement toutes les hypothèses. Or, la justification de la convergence simple de ϕh vers *f*, ainsi que l'hypothèse de domination sur *[0, 1]*, ont été souvent oubliées.

Question 8. Une fois obtenu l'équivalent $R(x) \sim \sqrt{\frac{\pi x}{2}}$, $x \to 0^+$, celui-ci implique la non-dérivabilité de *R* en 0.

Question 9. L'existence et la *2π*-périodicité de *F* ont en général été correctement établies. La continuité de *F* était plus délicate à montrer : elle découlait de la convergence normale de la série définissant *F* non pas sur $\mathbb{R}$ (sauf si *f* est nulle !), mais sur tout segment de $\mathbb{R}$. Celle-ci a été rarement correctement justifiée.

Question 10. Cette question a été en général bien traitée. Il convenait de ne pas s'y éterniser !

Question 11. Beaucoup de candidats songent à utiliser l'injectivité de la transformation de Fourier, qui était admise par l'énoncé. Pour calculer les coefficients de Fourier de *2πF* et *G*, il fallait justifier la possibilité d'intégrer terme à terme, puis calculer $\int_0^{2\pi} e^{-int}\, dt, n \in \mathbb{Z}$.

Question 2. Cette question a été très rarement bien traitée, très peu de candidats pensant à appliquer le résultat de la question précédente à une autre fonction que *f*. Bien entendu, on ne pouvait « choisir *a = 2π* ».

Question 13. Pour montrer que la fonction *f* est C^∞ sur $\mathbb{R}$, il suffisait de l'écrire comme la somme d'une série entière. Les calculs, très simples, n'ont pas toujours été menés à leur terme. On a même parfois lu que « la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ ».

Question 14. Les difficultés de nombreux candidats avec l'exponentielle complexe les ont empêchés d'obtenir des expressions correctes des deux premières dérivées de *f*. On pouvait détecter de grossières erreurs de calcul en se souvenant que f' (resp. f'') est une fonction impaire (respectivement paire). La justification des convergences vers *0* de f' et f'' à l'infini a parfois donné lieu à d'étonnantes inégalités entre nombres complexes.

Question 15. Pour traiter cette question, on pouvait ou bien intégrer par parties (dans le bon sens !) ou bien, plus judicieusement, utiliser l'estimée :

$$e^{ix^2} = -\frac{1}{4}f''(x) + O(x^{-2})$$

en prenant garde au fait que l'intégrale de f'' sur $\mathbb{R}$ n'est que semi-convergente.

Question 16. Les candidats ayant abordé cette question se sont souvent arrêtés après la double intégration par parties.

Les questions suivantes ont été rarement abordées avec succès.

1.6. Mathématiques I — PSI

Le joli problème de mathématiques de cette année permet d'obtenir, par une méthode probabiliste, un équivalent en l'infini d'une famille de fonctions. La première partie porte sur l'étude de séries entières : rayon de convergence et développements classiques. La deuxième partie donne, à l'aide des probabilités, un équivalent en l'infini d'une fonction définie comme somme d'une série entière. La partie III permet de déduire de II d'autres comportements asymptotiques. Dans la partie IV, on déduit de III le comportement en l'infini d'une solution d'équation différentielle.

Le problème contient un certain nombre de questions élémentaires et proches du cours, qui ont été abordées par une majorité de candidats, pour lesquelles le barème était volontairement généreux. Le reste est de difficulté raisonnable, mais demande un peu plus d'initiative. Cette épreuve a parfaitement répondu aux attentes du concours. La diversité des thèmes abordés ainsi que le panachage dans la difficulté des questions ont su départager les candidats.

Analysons maintenant les réponses aux questions.

Question 1. Cette question est presque toujours abordée. Le critère de d'Alembert est généralement utilisé, mais les simplifications dans les calculs sont parfois folkloriques. Un argument du type « par croissance comparée, on a aussitôt... » ne donne pas de point.

Question 2. Les développements usuels en série entière sont le plus généralement connus. L'absence du premier terme n'est pas toujours prise en compte.

Question 3. L'existence de l'espérance vient de l'absolue convergence de la série. Chez bon nombre de candidats, le théorème de transfert donne systématiquement l'existence de l'espérance de *f(X)* lorsque *X* admet une espérance, ce qui est bien sûr inexact. La valeur de l'espérance est donnée par une moitié des candidats.

Question 4. L'espérance et la variance sont presque systématiquement données ; le théorème de Bienaymé-Tchebychev n'est pas toujours bien énoncé. L'application quant à elle n'est traitée que par un tiers des candidats.

Question 5. L'inégalité de Markov est souvent proposée. La convergence dans la deuxième partie de la question, qui utilise notamment Q4, est rarement traitée.

Question 6. Les correcteurs ont été surpris par le grand nombre de copies dans lesquelles figuraient les arguments suivants : un produit de variables aléatoires admettant une espérance, admet une espérance, la linéarité de l'espérance donne que l'espérance d'un produit est le produit des espérances. L'espérance d'une constante est nulle. Bien sûr, tous ces arguments sont incorrects.