Khôlles : quinzaine numéro 8

Du 29 janvier au 9 février 2024

1 Première semaine : probabilités, variables aléatoires

Espérance et au delà : à partir de mercredi.

- Variables aléatoires : généralités, lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson).
- Couples de lois. Lois conjointes et marginales. Indépendance. Somme de deux Poissons (ou binomiales) indépendantes.
- Espérance : théorème du transfert. Si X et Y sont indépendantes d'espérance finie, alors XY aussi, avec $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Inégalité de Markov.
- Variance : son existence est équivalente à l'absolue convergence de $\sum x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n)$. Variance d'une somme de variables indépendantes, de $aX + b$; inégalité de Bienaymé-Tchebychev (attention : la loi faible des grands nombres est dégradée au rang d'application de cette dernière) ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Covariance.
- Fonctions génératrices : elles sont de rayon de convergence minoré par 1, définies et continues sur $[0, 1]$. Dérivable en 1 si et seulement si la variable a une espérance finie. Fonction génératrice d'une somme d'indépendantes.

2 Deuxième semaine : espaces préhilbertiens (début)

Tout exercice de probabilité est le bienvenu.

- Rappels de sup sur les préhilbertiens : définition d'un produit scalaire ; Cauchy-Schwarz ; polarisation. Orthogonal d'une partie.
- Existence de bases orthonormées en dimension finie (par récurrence, et par Gram-Schmidt).
- Matrice d'un produit scalaire ; changement de base ; matrices orthogonales ; décomposition QR (en exercice).

3 Questions de cours

- (S1) Théorème de continuité croissante.
- (S1) Bayes, probabilités composées.
- (S1+S2) La somme de deux Poissons indépendantes est une Poisson.
- (S1+S2) Preuve de $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$... dans le cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: cas fini ou cas infini en détournant pudiquement le regard sur la question des convergences.
- (S2) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- (S2) Cauchy-Schwarz (dans les préhilbertiens), dont les cas d'égalité.
- (S2) $X^\perp$ est un sous-espace ; $F \cap F^\perp = \{0\}$; $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$.
- (S2) Existence de base orthonormée (en dimension finie) par récurrence ou par Gram-Schmidt (au choix du colleur).

4 Coming next

Prochaine quinzaine : Endomorphismes symétriques, orthogonaux.