PARTIE I

A)

1. Le polynôme caractéristique de A vaut :
$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-8 & -4 & 7 \\ 8 & X+4 & -8 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\left((X-8)(X+4)+32\right) = X(X-1)(X-4).$$
Il est scindé à racines simples, donc :
$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

2. Notons tout d'abord que f possède trois valeurs propres distinctes (0, 1 et 4), en dimension trois, donc chaque sous-espace propre est une droite.
Si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on lit directement sur la matrice : $f(e_1) = 2f(e_2)$, ce qui nous donne un habitant du noyau de f, à savoir : $v_1 = e_1 - 2e_2$. La matrice de $f - \mathrm{Id}_E$ dans $\mathcal{E}$ est
$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -7 \\ -8 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
qui est comme attendu de rang 2. Une fois encore, un élément non nul du noyau de $f - \mathrm{Id}_E$ nous est offert sur un plateau par la matrice : il s'agit de $v_2 = e_1 + e_3$
Enfin, la matrice de $f - 4\mathrm{Id}_E$ dans $\mathcal{E}$ est
$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ -8 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
et on constate que $v_3 = (1, -1, 0)$ est dans le noyau de $f - 4\mathrm{Id}_E$.
La famille (v_1, v_2, v_3) est constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc est libre, et constitue bien une base de E :
$$\boxed{\text{Avec } v_1 = (1,-2,0),\ v_2 = (1,0,1) \text{ et } v_3 = (1,-1,0), \text{ on a } \mathrm{Mat}(f, \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

3. La matrice A^m représente f^m dans $\mathcal{E}$. Ce même endomorphise est représenté par D^n dans $\mathcal{V}$, donc en notant P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{V}$ (celle qui représente les v_i dans $\mathcal{E}$, ou encore la $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$), la formule de changement de base done directement :
$$\boxed{A^m = PD^mP^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. Pour calculer P^{-1}, on peut :
— **Pivoter** pour résoudre formellement $PX = Y$:
$$PX = Y \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ -2x_1 & & & - & x_3 & = & y_2 \\ & & x_2 & & & = & y_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ & & 2x_3 & + & x_3 & = & y_2 + 2y_1 \\ & & x_2 & & & = & y_3 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccl} x_2 & = & y_3 \\ x_3 & = & y_2 + 2y_1 - 2x_3 = 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_1 & = & y_1 - x_2 - x_3 = -y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} Y$$

Et ainsi :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

— **Pivoter** pour exprimer les e_i en fonction des v_i (P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{E}$, ou encore la matrice de l'identité entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{V}$; bref, la matrice représentant les e_i en fonction des v_i) :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 - 2e_2 \\ v_2 = e_1 + e_3 \\ v_3 = e_1 - e_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 & - & 2e_2 & & & = v_1 \\ & & 2e_2 & + & e_3 & = v_2 - v_1 \\ & & e_2 & & & = v_3 - v_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_2 = -v_1 + v_3 \\ e_3 = v_2 - v_1 - 2e_2 = v_1 + v_2 - 3v_3 \\ e_1 = v_1 + 2e_2 = -v_1 + 2v_3 \end{cases}$$

Et finalement :

$$\boxed{P^{-1} = \mathrm{Mat}(\mathcal{E}, \mathcal{V}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{E}, \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

— **Pivoter** pour mettre en œuvre la méthode magique :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Et on lit dans le bloc de droite l'inverse de P.

— Demander à son CAS favori :

```
> P:=Matrix([[1,1,1],[-2,0,-1],[0,1,0]]):
  P**(-1);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il reste à calculer joyeusement PD^mP^{-1}

```
> Dm:=Matrix([[0,0,0],[0,1,0],[0,0,4**m]]):
  P.Dm.P**(-1);
```

Et si on croit Maple :

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f^m, \mathcal{E}) = A^m = PD^mP^{-1} = \begin{pmatrix} 2.4^m & 4^m & 1 - 2.4^m \\ -2.4^m & -4^m & 2.4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Le lecteur est invité à réfléchir aux différents symboles utilisés dans les trois premières méthodes : $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ *et* $\to$ *et à leur pertinence dans les différents contextes.*

5. On peut calculer *brute force*, pour $M \in \underset{3}{\mathrm{Mat}}(\mathbb{R})$ générique, $DM - DM$, et constater que cette matrice est nulle si et seulement si pour $i \neq j$, $m_{i,j} = 0$.
De façon plus digne [1], on peut géométriser le problème, en notant que si $m \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice M dans la base $\mathcal{V}$, alors $MD = DM$ si et seulement si $m \circ f = f \circ m$. Une analyse standard nous dit que cette condition de commutation impose la stabilité des sous-espaces propres de f par m, donc chaque $m(v_i)$ est de la forme $\lambda_i v_i$, donc M est diagonale. La réciproque est claire : si M est diagonale, alors $DM = MD$.
Ainsi :

1. Mais moins efficace les premières fois, il faut bien le reconnaître.

$$\boxed{\text{Les matrices commutant avec } D \text{ sont exactement les matrices diagonales.}}$$

6. Aheum... Supposons donc que $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$. On a alors $HD = H \cdot H^2 = H^3$ et $DH = H^2 \cdot H = H^3$,

$$\boxed{\text{et c'est gagné.}}$$

7. **Analyse :** supposons que $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$. D'après les deux questions précédentes, H est diagonale.

Synthèse : si $H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, alors $H^2 = \mathrm{Diag}(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$, donc $H^2 = D$ si et seulement si $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pm 1$ et $\alpha_3 = \pm 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe exactement quatre matrices dont le carré vaut } D \text{ : il s'agit de } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}.}$$

On voit ici que selon l'humeur de son auteur, une analyse peut être poussée plus ou moins loin : on aurait pu établir dans l'analyse la valeur nécessaire des α_i.

Bien entendu, $h^2 = f$ si et seulement si la matrice H de h dans $\mathcal{V}$ vérifie $H^2 = D$. Par ailleurs, $\mathrm{Mat}(h, \mathcal{E}) = P. \mathrm{Mat}(h, \mathcal{V}).P^{-1}$.

```
> H:=Matrix([[0,0,0],[0,epsilon[1],0],[0,0,2*epsilon[2]]]):
  P.H.P**(-1);
```

$$\begin{bmatrix} 4\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 \\ -4\varepsilon_2 & -2\varepsilon_2 & 4\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix}.$$

Les endomorphismes de carré f sont donc ceux dont la matrice dans $\mathcal{E}$ est

$$\boxed{\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

B)

1. Tout d'abord, $J^2 = 3J$; on a alors $J^3 = J^2 \cdot J = 3J \cdot J = 3J^2 = 9J$, puis par une récurrence qu'on va s'accorder immédiate :

$$\boxed{\text{Pour tout } m \geqslant 1,\ J^m = 3^{m-1} J.}$$

2. On note que $A = J + I_3$, donc $A^m = (I_3 + J)^m$, donc en Newtonisant (ce qui est licite ici car I_3 et J commutent) :

$$(I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} I_3^{n-k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \underbrace{J^k}_{3^{k-1}J} = I_3 + \frac{1}{3} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^k \right)}_{S} J,$$

avec :

$$S = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 1^{m-k} 3^k - 1 = (1+3)^m - 1 = 4^m - 1.$$

Finalement, $A^m = (I_3 + J)^m = I_3 + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)\, J$, soit en passant aux endomorphismes représentés par ces matrices dans $\mathcal{E}$:

$$\boxed{\text{Pour tout } m \geqslant 1,\ f^m = \mathrm{Id}_E + \frac{1}{3}(4^m - 1)\, j.}$$

Pour $m = 0$, on constate que cette formule reste exacte.

3. On peut noter que le spectre de J est simple à déterminer (matrice de rang 1...), donc on peut en déduire celui de $A = J + I_3$.
Si on veut se reposer le cerveau, on peut aussi calculer le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1 \\ X-4 & X-2 & -1 \\ X-4 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$$
$$= (X-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \underset{C_i \leftarrow C_i+C_1}{=} (X-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 \\ 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

Soit finalement : $\chi_A = (X-4)(X-1)^2$. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 4\}.}$$

Nous noterons donc $\lambda := 1$ et $\mu := 4$ dans la suite.
La suite de cette partie est assez maladroitement posée. L'idée de l'énoncé est certainement d'utiliser la relation établie à la question 2, mais si on commence par constater que f est diagonalisable, il suffit alors de noter p et q les projecteurs respectifs sur les sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(f-4\mathrm{Id}_E)$ dans la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ pour traiter toute la suite très facilement : on a en effet $f = \lambda p + \mu q$, avec $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $p \circ q = q \circ p$... et tout s'enchaîne !

4. D'après la question 2, **il suffit** de prendre :

$$\boxed{p = \mathrm{Id}_E - \frac{1}{3}\,j \text{ et } q = \frac{1}{3}\,j.}$$

L'unicité se fait en résolvant le système donné par, disons, les deux premières relations.
L'indépendance linéaire de p et q peut s'obtenir par exemple en observant leurs matrices dans la base canonique : si $I_3 - \frac{1}{3}J$ et $\frac{1}{3}J$ étaient liées, alors I_3 et J le seraient aussi, ce qui nous aurait sauté au yeux.

5. Je n'ai pas trop envie de faire le calcul, mais gageons que si les remarques géométriques racontées plus haut sont exactes, on doit avoir :

$$\boxed{p^2 = p,\ q^2 = q, \text{ et } p \circ q = q \circ p = 0.}$$

Vérifions tout de même...

```
> I3:=IdentityMatrix(3,3):J:=Matrix(3,3,1):P:=I3-J/3:Q:=J/3:
  P,Q;P.P,P.Q,Q.P,Q.Q;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Si $h = \alpha p + \beta q$, on a alors $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$, donc cet endomorphisme est égal à $f = p + 4q$ si (clair) et seulement si (liberté de (p, q)) $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$.

$$\boxed{\text{Les quatre solutions sont donc } \pm p \pm 2q.}$$

6. Déterminons les sous-espaces propres :
   — $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $x + y + z = 0$, c'est-à-dire $x = -y - z$. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \Big\{ \underbrace{(-y-z, y, z)}_{y(-1,1,0)+z(-1,0,1)} \ |\, y, z \in \mathbb{R} \Big\} = \mathrm{Vect}(w_1, w_2),$$

   avec $w_1 = (-1, 1, 0)$ et $w_2 = (-1, 0, 1)$: ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc constituent une famille libre, puis une base de $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.

— $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ \quad - 3y + 3z = 0 \\ \quad 3y - 3z = 0 \end{cases},$$

soit encore

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(y+z) = z \\ y = z \end{cases}$$

et donc :

$$\operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_E) = \{(z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(w_3),$$

avec $w_3 = (1,1,1)$

Enfin, on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe. Comme la somme de leurs dimensions vaut $2+1=3=\dim(E)$, ils sont bien supplémentaires. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable, et une base de vecteur propres est } \mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.}$$

Puisque $f(w_1) = w_1$, $f(w_2) = w_2$ et $f(w_3) = 4w_3$, la matrice D de f dans $\mathcal{W}$ est diagonale. Si on a bien compris la géométrie du problème, on sait que p et q sont les projections associées à $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_E)$, donc leur matrices dans $\mathcal{W}$ sont claires. Si on a perdu de vue ces aspects géométriques, on peut calculer les $p(w_i)$ en travaillant dans la base canonique : par exemple, $P\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ fournit $p(w_1) = w_1$... On peut également appliquer la formule du changement de base : notant R la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{W}$, on a $\operatorname{Mat}(p, \mathcal{W}) = R^{-1}\operatorname{Mat}(p, \mathcal{E})R$... Bref comme toujours, une compréhension géométrique du problème permet d'éviter des calculs sordides.

Finalement :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \operatorname{Mat}(p, \mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Mat}(q, \mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

7. En pensant très fort à une symétrie, on peut voir apparaître $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le carré vaut I_2. Cela va constituer le premier bloc d'une matrice $(3,3)$ dont le carré vaudra D :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2 \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = D.}$$

8. Notons h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{W}$ vaut $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: la question précédente nous assure que $\operatorname{Mat}(h^2, \mathcal{W}) = Y^2 = D = \operatorname{Mat}(f, \mathcal{W})$, donc $h^2 = f$. Enfin, les combinaisons linéaires de p et q ont des matrices dans $\mathcal{W}$ qui sont diagonales, ce qui n'est pas le cas de h. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } h \text{ de matrice } Y \text{ dans } \mathcal{W} \text{ vérifie } h^2 = f \text{ et n'est pas dans } \operatorname{Vect}(p,q).}$$

9. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$. La relation $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - 4\mathrm{Id}_E) = 0$ donne alors $(h^2 - \mathrm{Id}_E) \circ (h^2 - 4\mathrm{Id}_E) = 0$, donc $P = (X^2 - 1)(X^2 - 4)$ est un polynôme annulateur de h. Mais $P = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2)$ est **scindé à racines simples**, donc :

$$\boxed{h \text{ est diagonalisable.}}$$

PARTIE II

1. Simple calcul, en utilisant les relations données dans l'énoncé :

$$(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mu\,\mathrm{Id}_E) = f^2-(\lambda+\mu)f+\lambda\mu\,\mathrm{Id}_E = \big(\lambda^2 - \lambda(\lambda + \mu) + \lambda\mu\big)\,p+\big(\mu^2 - \mu(\lambda + \mu) + \lambda\mu\big)\,q,$$

soit encore :

$$\boxed{(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mu\,\mathrm{Id}_E) = 0.}$$

Ainsi, $(X - \lambda)(X - \mu)$ est un polynôme annulateur de f scindé à racines simples, donc

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

2. On sait que les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur de f, donc ces valeurs propres sont forcément dans l'ensemble $\{\lambda, \mu\}$ (« il n'y en a pas d'autres »).
Réciproquement : si $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ était bijective, alors en composant la relation $(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mu\,\mathrm{Id}_E) = 0$ par $(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^{-1}$, on obtiendrait $f = \mu\,\mathrm{Id}_E$, soit encore

$$f = \mu(p + q) = \mu p + \mu q = f + (\lambda - \mu)p.$$

Or $\lambda \neq \mu$, donc $p = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est non bijectif donc non injectif, donc λ est une valeur propres de f. Le même raisonnement tient évidemment pour μ, et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda, \mu\}}$$

3. La relation $(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mu\,\mathrm{Id}_E) = 0$ se réécrit $((\mu - \lambda)q) \circ ((\lambda - \mu)p) = 0$, soit comme $\lambda \neq \mu$: $q \circ p = 0$. Par ailleurs, $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ et $f - \mu\,\mathrm{Id}_E$ commutent, donc $(f - \mu\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = 0$, relation dont on tire : $p \circ q = 0$.
En composant la relation $p + q = \mathrm{Id}_E$ par p, on obtient alors $p^2 + 0 = p$, et de même : $q^2 = q$. Finalement :

$$\boxed{p \circ q = q \circ p = 0,\ p^2 = p \text{ et } q^2 = q.}$$

4. Le spectre de f est connu et ne contient pas 0, donc :

$$\boxed{f \text{ est bijective.}}$$

De façon classique, on exploite la relation $f^2 - (\lambda+\mu)f + \lambda\mu\,\mathrm{Id}_E = 0$ en deux temps pour trouver : $f \circ \left(\dfrac{-1}{\lambda\mu}\,(f - (\lambda + \mu)\mathrm{Id}_E)\right) = \mathrm{Id}_E$, donc :

$$\boxed{f^{-1} = \frac{-1}{\lambda\mu}\,(f - (\lambda + \mu)\mathrm{Id}_E) = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q}$$

Si on travaille dans une base adaptée au problème, ce résultat est très clair, n'est-il pas ?

5. Le résultat $\mathcal{P}(m)$: « $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ » se prouve par récurrence sans finesse[2] **pour m positif**. Pour étendre le résultat aux m strictement négatifs, on peut prouver $\mathcal{Q}(n)$: « $f^{-n} = \lambda^{-n}p+\mu^{-n}q$ » par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Ici encore, si on travaille dans une base adaptée au problème les matrices de f, f^m, p et q sont connues, et le résultat demandé devient alors évident...

6. La famille (p, q) est libre (composer une combinaison linéaire nulle avec p...), donc :

$$\boxed{\text{la dimension de } F = \mathrm{Vect}(p, q) \text{ est égale à deux.}}$$

2. On utilise essentiellement : $p \circ q = q \circ p = 0$.

7. Il s'agit de déterminer les $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $h = \alpha p + \beta q$ soit dans $\mathcal{R}(f)$, c'est-à-dire $\alpha^2 p + \beta^2 q = f$, soit encore **par liberté** de (p, q) : $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = q$. Il y a exactement quatre possibilités pour le couple (α, β) :

$$\boxed{\mathcal{R}(f) \cap F = \{-\sqrt{\lambda}p - \sqrt{\mu}q, -\sqrt{\lambda}p + \sqrt{\mu}q, \sqrt{\lambda}p - \sqrt{\mu}q, \sqrt{\lambda}p + \sqrt{\mu}q\} = \{\pm\sqrt{\mu}p \pm \sqrt{\mu}q\}}$$

8. On se souvient d'une matrice dont le carré vaut I_2..

$$\boxed{\text{La matrice } K = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & (0) \\ 1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{(0)} & I_{k-2} \end{array}\right) \text{ a pour carré } I_k.}$$

9. Supposons que la multiplicité (disons k) de $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ (qui est aussi la dimension du sous-espace propre puisque f est diagonalisable) est supérieure ou égal à 2.

   On travaille dans une base $\mathcal{F}$ de diagonalisation de f, avec (par blocs) : $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \lambda I_k & (0) \\ (0) & \mu I_{n-k} \end{pmatrix}$

   Puisque $p = \dfrac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu \mathrm{Id}_E)$, on a $\mathrm{Mat}(p, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} I_k & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}(q, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} (0) & (0) \\ (0) & I_{n-k} \end{pmatrix}$

   En reprenant K la matrice de la question précédente, on a alors $\begin{pmatrix} K & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} I_k & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$, ce qui conduit à nous intéresser à p', l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{F}$ vaut $\begin{pmatrix} K & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$: cet endomorphisme de E vérifie bien $p'^2 = p$, et n'est pas combinaison linéaire de p et q (ici encore, les combinaisons linéaires de p et q ont des matrices diagonales dans $\mathcal{F}$, ce qui n'est pas le cas de p').

   Il reste à vérifier que $p' \circ q = q \circ p' = 0$, ce qui est instantané matriciellement.

$$\boxed{\text{On a bien prouvé l'existence de } p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F \text{ tel que } p'^2 = p, \text{ et } p' \circ q = q \circ p' = 0.}$$

10. Supposons : $\dim(E) \geqslant 3$. La somme des dimensions des deux sous-espaces propres [3] est supérieure ou égale à 3, donc l'un des deux sous-espaces propres est de dimension au moins 2, et la question précédente fournit alors un habitant de $\mathcal{R}(f)$ qui n'est pas dans F :

$$\boxed{\text{Si } \dim(E) \geqslant 3, \text{ alors } \mathcal{R}(f) \not\subset F.}$$

PARTIE III

1. Simple linéarité, moyennement excitante à rédiger... Notons donc $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n \in \mathbb{R}[X]$. On a alors :

$$P(f) = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_k \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_i^k\right)}_{P(\lambda_i)} p_i\right)$$

   Soit finalement comme attendu :

$$\boxed{P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i.}$$

2. Il suffit de considérer le polynôme $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_m)$: il vérifie $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, donc d'après la question précédente :

$$\boxed{\prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i = 0}$$

   Et d'après le cours :

$$\boxed{f \text{ possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc est diagonalisable.}}$$

3. On rappelle que f est diagonalisable !

3. Soit $\ell \in [\![1,m]\!]$. On a bien évidemment $L_\ell(\lambda_\ell)=1$, et $L_\ell(\lambda_j)=0$ pour tout $j\in[\![1,m]\!]$ différent de ℓ, donc $\displaystyle\sum_{j=1}^m P(\lambda_j)p_j = L_\ell(\lambda_m)p_m = p_m$, donc d'après la question 1 :

$$\boxed{L_\ell(f)=p_\ell}$$

Soit $\ell \in [\![1,m]\!]$. En suivant les définitions :

$$(f-\lambda_\ell \mathrm{Id}_E)\circ p_\ell = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i\neq \ell}(\lambda_\ell-\lambda_i)} \underbrace{\prod_{i=1}^m (f-\lambda_i\mathrm{Id}_E)}_{=0}$$

donc :

$$\boxed{\text{L'image de } p_\ell \text{ est incluse dans le noyau de } f-\lambda_\ell\mathrm{Id}_E.}$$

On sait déjà que le spectre de f est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de f, donc $\mathrm{Sp}(f)\subset\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$.
Réciproquement, soit $\ell\in[\![1,m]\!]$. Tout élément y de $\mathrm{Im}\,(p_\ell)$ vérifie $p_m(y)=\lambda_\ell y$. Et comme chaque p_i est non nul, il existe bien $y\in\mathrm{Im}\,(p_\ell)$ non nul : c'est un vecteur propre pour la valeur propre λ_ℓ.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f)=\{\lambda_1,...,\lambda_m\}.}$$

4. Soit $(i,j)\in[\![1,m]\!]^2$. On se souvient que $p_k=L_k(p)$, et donc :

$$p_i\circ p_j = L_i(f)\circ L_j(f) = (L_iL_j)(f) = \sum_{k=1}^m (L_iL_j)(\lambda_k)p_k.$$

Si $i\neq j$, on a toujours au moins un des deux termes $L_i(\lambda_k)$ et $L_j(\lambda_k)$ qui est nul, donc $p_i\circ p_j=0$. Si $i=j$, alors $L_iL_j(\lambda_k)$ vaut 1 si $k=i$, et 0 sinon. Ainsi :

$$\boxed{\text{si } (i,j)\in[\![1,m]\!]^2,\text{ alors } p_i\circ p_j = \begin{cases}0 & \text{si } i\neq j\\ p_i & \text{sinon}\end{cases}}$$

5. Puisque f est diagonalisable et a pour spectre $\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$, on a directement :

$$\boxed{E=\bigoplus_{i=1}^m \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i\mathrm{Id}_E)}$$

Soit $x\in E$. On décompose x selon la somme précédente : il existe $x_1,...,x_m\in E$ tels que $x=x_1+\cdots+x_m$, avec chaque x_i dans $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i\mathrm{Id}_E)$. On a alors $f(x_i)=\lambda_ix_i$, puis $f^k(x_i)=\lambda_i^kx_i$, et enfin $P(f)(x_i)=P(\lambda_i)x_i$ pour tout polynôme P.
En particulier pour $P=L_i(f)$: $p_i(x)=L_i(\lambda_i)x_i=x_i$, ce qui est exactement le résultat attendu :

$$\boxed{\text{Les } p_i \text{ sont les projecteurs associés à la décomposition } E=\bigoplus_{i=1}^m \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i\mathrm{Id}_E)}$$

6. Les p_i constituent une famille libre (composer une combinaison linéaire nulle par un p_i, ou bien raisonner dans une base adaptée...), donc

$$\boxed{\mathrm{Vect}(p_1,...,p_m)\text{ est de dimension } m.}$$

7. **Analyse :** si $u\in\mathcal{R}(f)\cap F$, alors u s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^m\alpha_ip_i$ avec les α_i dans $\mathbb{R}$. On a alors $u^2=f=\displaystyle\sum_{i=1}^m\lambda_ip_i$ d'une part, et d'autre part, puisque $p_i\circ p_j=\delta_{i,j}p_i$:

$$u^2=(\alpha_1p_1+\cdots+\alpha_mp_m)(\alpha_1p_1+\cdots+\alpha_mp_m)=\alpha_1^2p_1+\cdots+\alpha_m^2p_m.$$

Par liberté[4] de $(p_1, ..., p_m)$, cela implique : pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\alpha_i^2 = \lambda_i$, donc (les λ_i sont positifs) $\alpha_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$.

Synthèse : si pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\alpha_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$, alors le calcul précédent nous assure que $u^2 = f$.

$$\boxed{\text{Les éléments de } \mathcal{R}(f) \cap F \text{ sont exactement les } \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i} p_i, \text{ avec } \varepsilon_i \in \{-1, 1\}.}$$

88.1) Les dimensions $d_i = \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ sont strictement positives et vérifient (puisque f est diagonalisable) : $n = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Cela leur impose d'être toutes égales à 1.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1, n]\!]^2, \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \text{ est une droite.}}$$

8.2) Supposons : $h \in \mathcal{R}(f)$. On a alors $h \circ f = h \circ h^2 = h^3 = h^2 \circ h = f \circ h$, donc les sous-espaces propres de f sont stables par h. En particulier, si x est un vecteur propre de f (disons pour la valeur propre λ), alors $h(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ qui est une droite, donc est égal à $\mathrm{Vect}(x)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \alpha x$, et ainsi :

$$\boxed{x \text{ est vecteur propre pour } h.}$$

8.3) Commençons par choisir, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, un vecteur propre e_i associé à la valeur propre λ_i : $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ est alors une base de E.

Soit $h \in \mathcal{R}(f)$: la question précédente nous assure que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $h(e_i) = \alpha_i e_i$. Les endomorphismes h et $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k$ coïncident alors sur la base $\mathcal{E}$, donc sont égaux, donc $h \in F$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{R}(f) \subset F}$$

Lorsque $h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i$, on a $h^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 p_i$, donc pour avoir $h^2 = f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$, il est nécessaire (liberté des p_i) d'avoir $\lambda_i = \alpha_i^2$ pour tout i, donc les λ_i doivent être des réels positifs ou nuls. La question précédente nous dit que cette condition est suffisante. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{R}(f) \text{ est non vide si et seulement si tous les } \lambda_i \text{ sont dans } \mathbb{R}_+.}$$

9. Supposons que tous les λ_i sont dans $\mathbb{R}_+$, avec $m < n$. L'un des sous-espaces propres, disons $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)$, est alors de dimension au moins égale à deux. On va alors construire comme à la fin de la partie II une racine de f qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(p_1, ..., p_m)$.

   On travaille par exemple sur une base adaptée au problème. On peut envoyer e_1 sur $\sqrt{\lambda_1} e_2$, e_2 sur $\sqrt{\lambda_1} e_1$, et pour $i \geqslant 2$, e_i sur $\sqrt{\lambda} e_i$, avec λ tel que $f(e_i) = \lambda e_i$. Un tel endomorphisme a bien pour carré f, et n'est pas combinaison linéaire des p_i. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } m < n \text{ et tous les } \lambda_i \text{ sont dans } \mathbb{R}_+, \text{ alors } \mathcal{R}(f) \not\subset F.}$$

PARTIE IV

A)

1. Il suffit[5] bien entendu de prendre x en dehors du noyau de f^{p-1} (ce qui est possible car $f^{p-1} \neq 0$), et on vérifie alors aisément[6] que $\left(x, f(x), ..., f^{(p-1)}(x)\right)$ est libre.

   On obtient alors une famille libre de cardinal p en dimension n, donc $p \leqslant n$. On a alors $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

$$\boxed{f^n = 0}$$

4. Question précédente !
5. Fait en cours/TD/DS/DM/colle combien de fois depuis le début de la sup ?
6. Mais avec tout de même une récurrence avec prédécesseurs, ou bien un argument de minimalité pour contrer ladite récurrence.

2. Supposons : $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, et choisissons $h \in \mathcal{R}(f)$. On a alors $h^{2p} = 0$ donc h est nilpotent ; mais $h^{2p-2} = (h^2)^{p-1} = f^{p-1} \neq 0$, donc l'ordre de nilpotence de h est au moins égal à $2p-1$, et on peut appliquer le raisonnement précédent (il existe une famille libre de cardinal $2p-1$), ce qui nous assure que :

$$\boxed{2p-1 \leqslant n.}$$

3. L'application $f : x \mapsto (1+x)^{1/2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, donc le théorème de Taylor-Young nous assure qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Les termes $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ et $o(x^n)$ sont l'un et l'autre des $O(x^n)$, et ainsi, il suffit [7] de prendre $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Pour les perfectionnistes :

$$\left((1+x)^{1/2}\right)^{(k)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{1/2-k},$$

donc

$$a_k = \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}\frac{3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k-2)}{2^k 2^{k-1}(k-1)!},$$

soit finalement :

$$\boxed{a_k = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{k!(k-1)!2^{2k-1}}.}$$

4. Tout d'abord, il existe φ bornée au voisinage de 0 telle que $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \varphi(n)$. En passant au carré puis en rangeant correctement les choses :

$$P_n^2(x) - x - 1 = x^n\left(-2\varphi(x)P_n(x) - x^n\varphi^2(x)\right).$$

En notant $\eta : x \mapsto -2\varphi(x)P_n(x) - x^n\varphi^2(x)$, on a alors :

$$\boxed{\eta \text{ est bornée au voisinage de 0, et } P_n^2(x) - x - 1 = x^n\eta(x) \text{ pour tout } x}$$

Notons que ces relations non quantifiées en x (l'énoncé est pudique sur cette question) sont en fait vérifiées pour tout $x \neq 0$, de même que η est définie a priori sur $\mathbb{R}^*$.

Si on note v la multiplicité de 0 comme racine du polynôme $P_n^2 - X - 1$ (on ne parle plus de réels mais bien d'objets algébriques), il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n^2 - X - 1 = X^v Q$, avec de plus $Q(0) \neq 0$. D'après la question précédente, on a alors $t \mapsto t^{v-n}Q(t)$ bornée au voisinage de 0. Mais $Q(0) \neq 0$, donc $v - n \geqslant 0$ (sans quoi $t^{v-n}Q(t)$ tendrait vers $+\pm\infty$ en 0^+ donc ne serait pas borné). Ainsi, $v \geqslant n$, donc $P_n^2 - X - 1 = X^n.X^{v-n}Q$, et comme demandé :

$$\boxed{X^n \text{ divise } P_n^2 - X - 1.}$$

5. Avec les notations de la question précédente, $P_n^2(f) = \mathrm{Id}_E + f + f^n \circ f^{v-n} \circ Q(f) = \mathrm{Id}_E + f$, donc $P_n(f) \in \mathcal{R}(f)$, et ainsi :

$$\boxed{\mathcal{R}(f + \mathrm{Id}_E) \neq \emptyset.}$$

De même, on a $P_n^2(\alpha f) = \mathrm{Id}_E + \alpha f$, donc $P_n(\alpha f) \in \mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{Id}_E)$. Enfin, si $\beta > 0$ alors $P_n^2\left(\dfrac{f}{\beta}\right) = \mathrm{Id}_E + \dfrac{f}{\beta}$, donc $\left(\sqrt{\beta}P_n\left(\dfrac{f}{\beta}\right)\right)^2 = f + \beta\mathrm{Id}_E$, fournissant une racine pour $f + \beta\mathrm{Id}_E$.

$$\boxed{\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}_+^*, \text{ alors } \mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{Id}_E) \text{ et } \mathcal{R}(f + \beta\mathrm{Id}_E) \text{ sont non vides.}}$$

7. C'est également nécessaire ; pourquoi ?

B)

1. Que dire...
   — La matrice $T - \lambda I_n$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale ; « on » sait alors qu'elle est nilpotente.
   $$\boxed{(T - \lambda I)^n = 0}$$
   — On note $N = T - \lambda I_n$ et on montre ce qu'on sait bien sur les puissance de cette matrice, à savoir que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a « pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $j \leqslant i+k$, $(N^k)_{i,j} = 0$ ». Cette proposition $\mathcal{P}(k)$ se montre par récurrence sur k, et $\mathcal{P}(n)$ nous assure que $N^n = 0$, ce qui est le résultat attendu.
   — Version intermédiaire[8] : la matrice N^k est triangulaire, et à chaque nouvelle puissance, une pseudo-diagonale de zéros apparaît.
   — *Argument massue* : le polynôme caractéristique de T est $(X - \lambda)^n$, et on applique alors le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Le polynôme caractéristique de f est scindé : le cours nous assure alors qu'il existe une base dans laquelle la matrice de $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ est triangulaire supérieure. Sur la diagonale, on trouve les valeurs propres de f... c'est à dire une diagonale de λ, et on conclut grâce à la question précédente : la matrice de $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^n$ dans cette base adaptée est nulle, et donc :
   $$\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^n}$$
   Pour information : en PC, il n'y a pas Cayley-Hamilton, ce qui justifie la démarche de l'énoncé. Nouzôtres aurions pu conclure plus rapidement en notant que les hypothèses faites assuraient que le polynôme caractéristique de f vaut $(X - \lambda)^n$.
3. Puisque $(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^n = 0$, la question 5 de la (sous-)partie précédente nous assure que pour tout $\beta > 0$, $\mathcal{R}\left((f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) + \beta \mathrm{Id}_E\right) \neq \emptyset$. Il suffit alors de prendre $\beta = \lambda$, qui est bien strictement positif par hypothèse.
   $$\boxed{\text{Si } \lambda > 0, \text{ alors } \mathcal{R}(f) \neq \emptyset}$$

8. Agiter un peu les bras pour convaincre l'interlocuteur.

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 1 - SESSION 2010

Jean-François GROSJEAN
Maître de Conférences à l'Université de Nancy I

Présentation du sujet

L'objectif de l'épreuve est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$ des racines carrées de f. Cette étude se fait de manière progressive quant au niveau de difficulté. Le sujet est divisé en quatre parties. Voici une brève présentation du contenu de ces parties.

La partie I est très classique et calculatoire, largement abordable par un candidat ayant assimilé les techniques classiques d'algèbre linéaire : recherche de valeurs propres, de vecteurs propres, de puissance de matrices, calculs de composés d'endomorphismes. Cette partie traite deux exemples dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$. La partie A) se termine par la détermination des différentes racines carrées de la matrice réduite précédemment. La partie B) propose d'aborder la même question sur une autre matrice qui n'admet cette fois-ci que deux valeurs propres distinctes au lieu de trois. Plusieurs questions permettent de valoriser les candidats sur des calculs directs de réduction de matrice d'ordre 3.

Dans la deuxième partie, E est cette fois-ci de dimension quelconque $n \geqslant 2$. On considère un endomorphisme f qui satisfait certaines conditions. En particulier f est combinaison linéaire de deux endomorphismes p et q. Cette partie demande un peu plus de raisonnement, mais le candidat est encore ici largement guidé vers la solution par des questions assez simples mais assez imbriquées. Le but de cette partie est de montrer que p et q sont des projecteurs, de décrire l'espace F de toutes les racines carrées qui s'écrivent comme combinaison linéaire de p et q et de comparer F et $\mathcal{R}(f)$.

La troisième partie est une généralisation de la partie précédente, les endomorphismes f considérés et leurs puissances successives s'écrivant comme combinaison linéaire d'endomorphismes $p_1, \cdots, p_n$. Les premières questions s'avèrent assez simples mais techniquement difficiles. Les questions suivantes montent ensuite très rapidement en difficulté. Cette partie utilise en particulier des raisonnements sur les polynômes d'endomorphisme afin de prouver que $p_1, \cdots, p_n$ sont les projecteurs associés à la décomposition spectrale de f.

La quatrième partie aborde le même problème dans le cas d'un endomorphisme nilpotent général. Si le niveau de généralité des questions reste assez proche de la partie III, en revanche cela demande un peu plus de recul car, outre des résultats d'algèbre linaire, cette partie demande l'utilisation de résultats d'analyse et d'arithmétique sur les polynômes.

Remarques sur la façon dont a été traité le sujet

De très bonnes copies vont à l'essentiel tout en ne négligeant aucun détail important et parviennent à aborder presque toutes les questions de l'épreuve. Il semblerait que dans l'ensemble, les candidats aient fait un effort du côté de la présentation, même si l'honnêteté de la rédaction se dégrade au fil de l'épreuve. L'autre principal reproche qui peut être fait quant à la rédaction mathématique est la confusion qui existe entre les notions d'implication, d'équivalence, d'inclusion et d'égalité. Quelques copies vraiment très faibles ont été rencontrées, les réponses proposées étant souvent incohérentes.

La partie I a été la partie la mieux traitée. Dans la partie A) les premières questions ont été relativement bien traitées malgré quelques erreurs de calcul. La majorité des candidats connaît très bien la technique employée, mais on peut regretter cependant que bon nombre d'entre eux ne prennent pas le temps de procéder à des vérifications d'usage des résultats qu'ils proposent. Ces candidats ont perdu une occasion de constater qu'une erreur avait été commise. Comme les questions de cette partie s'enchaîne, la moindre erreur de calcul devient très pénalisante. Dans la question 4) par exemple, les résultats présentés ne sont pas toujours justes, mais très peu de candidats ont jugé utile de vérifier leur calcul par le calcul de $P^{-1}P$. Dans la question A)6) l'erreur la plus fréquente a été de supposer que H était forcément diagonale. La dernière question de la partie A) (question 7)) a été peu traitée correctement surtout dans sa deuxième partie.

Le début de la partie B) a été relativement bien traité. Dans la question B)4) la majorité des candidats est passée à côté de l'unicité du couple (p, q). Dans la question B)5), les candidats qui ont trouvé les bonnes expressions de p et q ne voient pas toujours qu'il s'agit de projections et certaines expressions de p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$ sont erronées. La question 6) a été bien réussie sauf pour les matrices de P et Q à donner dans la nouvelle base. Les dernières questions de la partie B) ont été peu et mal traitées.

Dans la question 1) de la partie II, le calcul de la composée est plutôt bien fait. Par contre le lien entre polynôme annulateur scindé n'admettant que des racines simples et diagonalisation n'est pas souvent fait et semble même dans certains centres inconnu. Dans la question 2), on a pu voir beaucoup de raisonnements faux, comme $f = \lambda\mathrm{id}$ et $f = \mu\mathrm{id}$. La question 3) a parfois été effectuée par de faux raisonnements d'identification. Les candidats ont eu du mal à montrer dans la question 4) que f est un isomorphisme et à trouver l'expression de f^{-1}. Dans la question 5) la récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ a été souvent bien faite. Pour $m \in \mathbb{Z}$, cela a posé beaucoup de problèmes. Le reste de la partie a été peu traité.

Dans la partie III, peu de questions ont été abordées mises à part les questions 1) et 2). La première question a été en général assez bien traitée. Dans la question 2) les candidats ont rarement pensé à poser le polynôme $P(X) = \prod(X - \lambda_i\mathrm{id})$ pour pouvoir appliquer la question 1). Pour ce qui est de la question 3) les candidats reconnaissent les polynômes de Lagrange sans pouvoir les utiliser. Le reste de la partie a été très peu abordé. Notons cependant que quelques candidats ont traité de manière correcte la question 8)1).

La partie IV a été la partie la moins traitée de tout le sujet. Lorsque la question A)1) est abordée elle est assez bien réussie. Cependant le fait de devoir choisir un x judicieux n'est en revanche pas toujours vu. Dans la question 3), les développements limités usuels ne semblent pas vraiment bien connus.

Pour la partie B), le résultat de trigonalisation de f a parfois été cité dans la question 2).