Probabilités

1 Sans les variables aléatoires

On commence par un exercice posé aux mines. On notera le réel effort de l'examinateur pour évaluer la capacité du candidat à faire des probabilités...

Exercice 1 – *Mines 2015 (PC) [3/10]*
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer :

$$\mathbb{P}(\{n\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

1.1 Dénombrement, probabilités finies

Exercice 2 – *Surjections [2/10]*
Déterminer le nombre de surjections de $[\![1,4]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$.

Exercice 3 – *Surjections-bis, Mines 2022 [4/10]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité pour qu'une fonction aléatoire (suivant la loi uniforme) de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ soit surjective.

Exercice 4 – *Deux sur deux [3/10]*
Dans une famille avec 2 enfants :

1. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons ?
2. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?
3. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

1.2 Dés, urnes et pièces

Exercice 5 – *Paires bicolores [5/10]*
Une urne contient n boules rouges et n boules noires. On les retire par poignées de deux, sans remise. Quelle est la probabilité pour que les n paires soient bicolores ?

Exercice 6 – *α boules noires [6/10]*
Soient $n \geqslant 1$ et $\alpha \in [\![1,n]\!]$. On considère $n+1$ urnes numérotées de 0 à n, la k-ième contenant k boules noires et $n-k$ boules blanches.
On choisit une urne au hasard (de façon uniforme) puis on tire **avec remise** α boules dans cette urne. Quelle est la probabilité pour que ces α boules soient noires ? Déterminer la limite de cette valeur quand n tend vers l'infini.

Exercice 7 – *Cinq faces [3/10]*
On lance un dé non biaisé à 5 faces. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1. Calculer p_1 et p_2.

2. Donner une relation de récurrence vérifiée par $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et en déduire la valeur de p_n, pour $n \geqslant 1$.

Exercice 8 – *Des dés [4/10]*
On jette $6n$ dés équilibrés. Quelle est la probabilité p_n que chaque entier entre 1 et 6 apparaisse n fois ? Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 – *Deux urnes [4/10]*
On dispose de deux urnes U_1 et U_2. La première contient deux boules blanches et trois boules noires. La seconde contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit initialement une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note la couleur et on la remet dans l'urne. Si la boule tirée était blanche (respectivement noire), le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_1 (respectivement U_2).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n-ème tirage est blanche », et $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$
3. En déduire la valeur de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 – *Une infinité de tirages [4/10]*
On lance une pièce une infinité de fois. Pour $i \geqslant 1$, on note A_i l'événement « le i-ème lancer tombe sur PILE ».

1. Décrire en français les événements $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ et $\displaystyle\bigcup_{i=42}^{\infty} A_i$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer de façon ensembliste l'événement D_n : « on obtient au moins un pile au delà du n-ème lancer ».
3. Décrire en français l'événement $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. Le comparer à $\displaystyle\bigcap_{n=945}^{\infty} D_n$.

1.3 Diverses modélisations

Exercice 11 – *IMT 2016 [3/10]*
On dispose de N coffres. Avec probabilité p, on place un trésor dans l'un des coffres (avec probabilité uniforme).
On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver de trésor. Quelle est la probabilité pour qu'on en trouve un dans le dernier ?

Exercice 12 – *Pénaux [6/10]*
Le petit Olivier et le petit Franz s'affrontent lors d'une compétition de penalty. À chaque essai, Olivier marque avec probabilité $5/6$, et Franz avec probabilité $4/5$. C'est Franz qui tire en premier. Ensuite, les tirs sont alternés, et le premier qui marque a gagné la compétition.

Figure 1 – Platoche, avec 50 kg de moins !

1. Quelle est la probabilité pour que Franz gagne ?
2. Qu'en est-il si on change la règle en celle de la « mort subite » : « À chaque tour, les deux joueurs tirent. Si l'un marque et pas l'autre alors il a gagné ; sinon on continue. » ?

Exercice 13 – *Transmission moyennement fiable ; TPE 2017 [5/10]*
Une information binaire (0/1) est transmise de proche en proche (aka « téléphone arabe »). La personne numéro 1 possède l'information 1. Au temps $n \geqslant 1$, la personne numéro n transmet son information à la personne numéro $n+1$:
— avec une probabilité $p \in]0,1[$ elle transmet l'information dont elle dispose ;
— avec une probabilité $1-p$ elle transmet l'information inverse.
(La personne numéro 2 aura donc l'information initiale « 1 » avec probabilité p).

1. Avec quelle probabilité la personne numéro 3 va-t-elle recevoir l'information initiale ?
2. Si on note p_n la probabilité que la personne n possède la bonne information[1], déterminer une relation de récurrence simple vérifiée par les p_n, puis la valeur des p_n.
3. Quel est le comportement de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 14 – *Puce ivrognesse [5/10]*
Une puce saute entre trois points P, Q et R. À chaque étape, elle saute vers l'un des deux autres points avec probabilité 1/2. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, avec p_n, q_n et r_n les probabilités pour qu'au temps n la puce se trouve respectivement aux points P, Q et R.

1. Établir une relation entre p_{n+1} et (p_n, q_n, r_n).
2. En déduire une relation matricielle de la forme $X_{n+1} = AX_n$, avec A à préciser.
3. Vérifier : $A^2 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3$, puis déterminer le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par $(X+1/2)(X-1)$. En déduire la valeur de la matrice A^n.
4. Montrer que X_n possède une limite qui ne dépend pas de X_0.

Exercice 15 – *Veaux, vaches, cochons, couvée ; attention : il y a un piège ! [3/10]*
Dans une ferme post-apocalyptique, certains animaux possèdent trois pattes.
— Les veaux constituent 20% du cheptel ; 10% possèdent 3 pattes.
— Les vaches constituent 50% du cheptel ; 1% possèdent 3 pattes.
— Les cochons constituent 10% du cheptel ; 2% possèdent 3 pattes.
— Les volailles, qui constituent le reste du cheptel, possèdent 3 pattes avec une probabilité 5%.
On tire au hasard un animal à trois pattes. Quelle est la probabilité pour qu'il fasse MEUHHH ?

FIGURE 2 – Gruik

1. Arrivés ici, vous connaissez p_1, p_2 et p_3.

Exercice 16 – *La taupe [5/10]*
Une taupe rentre dans son terrier par un des deux trous. À chaque croisement, elle tourne à droite ou à gauche avec probabilité 1/2.

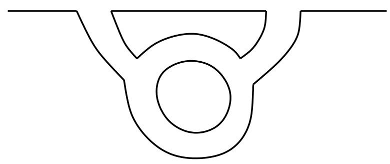


FIGURE 3 – L'univers épanouissant de la taupe

Quelle est la probabilité qu'elle ressorte par le même trou ?

1.4 Résultats un peu plus théoriques

Exercice 17 – *Indépendance [1/10]*
Montrer que si A et B sont deux événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Exercice 18 – *Exercice interminable ! [10/10]*
Les joueurs A et B jouent au tennis, et chaque point est remporté par A avec probabilité $p \in]0, 1[$.
Quelle est la probabilité que A remporte un jeu donné ?
Et un set ? Et le match ?
Cet exercice ne serait pas posé sans des indications/étapes. Essayez tout de même d'en faire quelque chose !

Exercice 19 – *CCP 2016 [6/10] – joli et classique*
Soit s un réel strictement plus grand que 1. On travaille sur $E = \mathbb{N}^*$, qu'on va probabiliser sur la tribu complète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.
On note $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers (avec donc $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...). Enfin, pour p premier, on note $A_p = \{kp \,|\, k \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble de ses multiples.

1. Montrer qu'on peut définir une probabilité en imposant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$
2. Pour p premier, calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
3. Déterminer $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{p_k}}$ ainsi que la probabilité de cet événement.
4. Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_{p_k}}\right)$ est convergente.
On note sa limite comme vous l'imaginez...
5. Montrer finalement :
$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-1/p_k^s} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Exercice 20 – *Centrale 2016 [8/10]*
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On considère l'événement : $A = \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant k} A_n$.

1. Montrer : $P(A) = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant k} A_b\right)$.

2. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(A)$.
   (b) Soit B l'ensemble des $\omega \in \Omega$ appartenant à une infinité de A_n. Déterminer $\mathbb{P}(B)$.
3. On suppose maintenant que les A_n sont mutuellement indépendants et que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Déterminer $\mathbb{P}(A)$.

2 Études de lois

Exercice 21 – *Mines 2022 [5/10] - Daphnée P.*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{U}_n$ (les complexes z tels que $z^n = 1$) suivant une loi uniforme.

1. Calculer l'espérance de l'argument de Z (pris dans $[0, 2\pi[$), de $\mathrm{Re}(Z)$, de $\mathrm{Im}\,(Z)$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}\,(Z))$.
3. $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}\,(Z)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 22 – *Mines 2017 [7/10]*
On effectue des expériences aléatoires et indépendantes : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec chaque X_i suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On note (quand elle existe...) T_n l'étape à laquelle on a eu le n-ième succès.

1. Donner la loi de T_1.
2. Déterminer la loi de T_2... puis de T_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-t)^n}$.
4. Calculer la fonction génératrice de T_n et en déduire l'espérance de T_n.

Exercice 23 – *TPE 2016 [4/10]*
Soit $p \in]0, 1[$. Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et de même loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = p$$

On définit par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ puis la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Donner la loi de Z_n.
3. À quelle conditions Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

3 Loi de Poisson et loi géométrique

Exercice 24 – *Deux géométriques comparées [5/10]*

1. Soient T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2 dans $]0, 1[$. Déterminer $\mathbb{P}(T_1 \leqslant T_2)$.
2. Application numérique : Alice et Bob lancent alternativement deux dés non pipés. Si à un moment Alice obtient une somme égale à 6 alors elle gagne (et le jeu s'arrête) ; si Bob obtient la somme de 7 alors il gagne (et le le jeu s'arrête). C'est Alice qui commence.
   Quelle est la probabilité qu'Alice gagne ?

Exercice 25 – *CCP 2017 [4/10]*
On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi. On définit $Z = X + Y + 1$, et on suppose que Z suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Montrer l'existence de la variance et l'espérance de X, et les calculer.

2. Calculer la fonction génératrice de X.
3. En déduire la loi de X.

Exercice 26 – *Centrale 2017 [7/10]*
Soient X et Y indépendantes suivant l'une et l'autre une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Rappeler $X(\Omega)$ et, pour $k \in X(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}(X=k)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant m)$.
3. On définit $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.
4. Déterminer la loi de $W = X - Y$, et prouver que W et Z sont indépendantes.

Exercice 27 – *CCP 2016 [4/10]*
Le nombre N d'enfants d'une famille suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Lors d'une naissance, la probabilité pour que l'enfant (il n'y a jamais de jumeaux, merci...) soit une fille est de p. Les sexes des différents bébés sont indépendants. On note respectivement X et Y les nombres de filles et de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe de (N, X).
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. (Extension probable :) Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 28 – *CCP 2016 [3/10]*
On suppose : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in]4,5[$.

1. Calculer $u_n = \dfrac{\mathbb{P}(X=n+1)}{\mathbb{P}(X=n)}$ et en déduire la convergence de la série $\sum u_n$.
2. Pour quel n aura-t-on $\mathbb{P}(X=n)$ maximale ?

Exercice 29 – *Centrale 2016 (deux fois) [3/10]*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Rappeler la définition de la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.
   Dans la suite, on suppose : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
   Donner la valeur de $G_X(t)$.
2. Montrer :
$$\forall t \geqslant 1 \ \forall a \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}.$$
3. En déduire : $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda$
4. Comparer avec une majoration obtenue via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

4 Diverses modélisations

Exercice 30 – *CCINP 2022 [6/10] - Perla E.-K.*
On dispose d'une urne contenant trois jetons numérotés de 1 à 3, et on réalise des tirages avec remise. On note respectivement Y et Z le nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux (respectivement trois) tirages différents.

1. Déterminer la loi de Y puis celle de $Y-1$. En déduire l'espérance de Y.
2. Déterminer la loi du couple (Y, Z).
3. En déduire la loi de Z et son espérance.

Exercice 31 – *Mines 2017 (deux fois) [8/10]*
Dans une urne, il y a N boules, dont $r \in [\![1, N]\!]$ blanches ; les $N-r$ autres étant noires. On tire des boules sans remise, et X désigne le numéro du tirage permettant de tirer la dernière boule blanche.

1. Pour $r = 1$ et $r = N$, reconnaître la loi de X ; donner son espérance.
2. *On suppose maintenant :* $1 < r < N$.

   Montrer que pour $k \in X(\Omega)$ (à déterminer), $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}\cdot$
3. Trouver une relation entre $\binom{p}{q}$ et $\binom{p-1}{q-1}$. En déduire l'espérance de X.

Exercice 32 – *CCP 2016 [3/10]*
Dans un casino, un joueur tire un nombre $N \in \mathbb{N}^*$, avec $\mathbb{P}(N = n) = \dfrac{1}{2^n}\cdot$ Si N est pair alors il gagne N jetons et sinon il perd N jetons.

1. Quelle est la probabilité de gagner ?
2. Quelle est l'espérance de gain ?

Exercice 33 – *Mines 2016 [8/10]*
Un institut de sondage appelle n personnes par vagues successives : à chaque vague, il rappelle tous ceux n'ayant pas déjà répondu. On note X_k le nombre de personnes répondant au k-ème appel ; on a donc $0 \leqslant X_k \leqslant n - (X_1 + \cdots + X_{k-1})$.
À chaque appel, une personne répond avec probabilité $p \in]0, 1[$ constante.

1. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
3. Donner la loi de X_k.
4. De façon indépendante de ce qui précède, déterminer la loi de $Y_k = X_1 + \cdots + X_k$.
5. Vérifier la cohérence à l'aide des espérances.

Exercice 34 – *Politique nataliste [4/10]*
Dans un village/une région/une ville/un pays, les couples font des enfants tant qu'ils n'ont pas eu de garçon[2]. À chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille (resp. un garçon) est de 1/2 (on exclut les naissances de jumeaux, qui compliquent la vie !).

1. Déterminer les lois du nombre d'enfants (E), de filles (F) et de garçons (G) par couple.
2. Déterminer les espérances des trois variables aléatoires E, F et G.
3. Déterminer l'espérance de la proportion (par couple) du nombre de garçons dans l'ensemble des enfants.

Exercice 35 – *Problème d'ascenseur [4/10]*
On se donne m et n dans $\mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble E des applications de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ de la « probabilité uniforme ». Pour $f \in E$, on définit $X(f)$ le cardinal de $f([\![1, m]\!])$.
Calculer $E(X)$.
C'est l'espérance du nombre d'arrêts d'un ascenseur amenant m personnes à leur étage, dans un immeuble à n étages.

5 Divers

Exercice 36 – *Centrale 2022 [5/10] - Daphnée P.*

1. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer :

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U \geqslant j)$$

2. Après quoi ils n'ont plus de temps, d'énergie, de volonté pour faire d'autres enfants !

2. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, toutes de même loi. On note $F_k = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = i)$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, ainsi que $M_n = \text{Max}(X_1, ..., X_n)$. Calculer $\mathbb{P}(M_n \leqslant k)$ en fonction de n et F_k.
3. On lance n fois un dés à 6 faces non pipé. Calculer la probabilité pour que le maximum soit 3.

Exercice 37 – *Centrale 2022 [2/10] - John D.*
Énoncé très partiel (seulement la première question...) :
On suppose que X suit une loi de Rademacher : $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. Montrer :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{uX}) \leqslant \mathrm{e}^{u^2/2}$$

Exercice 38 – *TPE 2017 [7/10]*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes deux à deux, avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0, 1[$ fixé. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1. (a) Calculer l'espérance et la variance de Y_k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Soient k, ℓ tels que $k < \ell$. Calculer $\text{Cov}(Y_k, Y_\ell)$.
2. Montrer :
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 39 – *Mines 2017 [5/10]*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On dit qu'on a un « doublet au rang n » lorsque $X_n = X_{n+1} = 1$, et on note p_n la probabilité d'avoir *le premier* doublet au rang n.

1. On note q_n la probabilité d'avoir au moins un doublet à un rang $\leqslant n$. Montrer :
$$q_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n.$$
   En déduire :
$$p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$
2. Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$.
3. En déduire une expression de p_n, pour $n \geqslant 1$.

Exercice 40 – *ENSAM 2017 [8/10]*
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi et la fonction génératrice de $S_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
2. Calculer l'espérance et la variance de $T_n = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$.
3. Déterminer, pour $x > 0$, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{E}(x^{T_n})$.
4. Même chose avec $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{ixT_n})$.

Exercice 41 – *ENSAM 2016 [4/10]*
Soient $X_1, .., X_n$ des variables de Bernoulli (de même paramètre $p \in]0, 1[$) mutuellement indépendantes. On fixe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on définit $D = \begin{pmatrix} X_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & X_n \end{pmatrix}$ et $M = PDP^{-1}$.

1. Déterminer la loi et l'espérance de $\mathrm{tr}(M)$ puis $\det(M)$ et enfin $\mathrm{rg}(M)$.
2. Déterminer la probabilité pour que les sous-espaces propres de M soient de même dimension.
3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   Quelle est la probabilité pour que $N + D$ soit diagonalisable ?

Exercice 42 – *TPE 2016 [2/10]*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires possédant chacune une espérance. On suppose : $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Prouver :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Exercice 43 – *Cachan 2016 [2/10]*
Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique. Déterminer la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 44 – *Cachan 2016 [3/10]*
On suppose : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et Y prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$. On suppose de plus que X_1, X_2 et Y sont mutuellement indépendantes. On pose $p = \mathbb{P}(Y = -1)$ et on pose : $M = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ YX_2^2 & X_1^2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la probabilité pour que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la probabilité pour que les valeurs propres de M soient réelles.

Exercice 45 – *Points fixes d'une permutation [6/10]*
On munit $\Omega = \mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme ($\mathbb{P}(A) = |A|/n!$) et on s'intéresse au nombre moyen $\mathbb{E}(X)$ de points fixes d'une permutation σ :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \qquad X(\sigma) = \mathrm{Card}\left(\{i \in [\![1, n]\!] \,;\, \sigma(i) = i\}\right).$$

On définit par ailleurs, pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la fonction caractéristique de l'événement « $\sigma(i) = i$ » :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \qquad X_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer : $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{P}(\sigma(1) = 1) = \dfrac{1}{n}\cdot$
2. Exprimer X à l'aide des X_i et en déduire l'espérance de X.
3. Calculer la variance de X.

Exercice 46 – *Un minimum [5/10]*
Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 (bref : une variance). Montrer que pour tout réel m, on a :

$$\mathrm{Var}(X) \leqslant \mathbb{E}\left((X-m)^2\right).$$

6 Indications

Exercice 1 – Pffffff.... $\Omega = \mathbb{N} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}$, et puisque cette réunion est disjointe, la série $\sum \mathbb{P}(\{n\})$ est convergente (cf axiomatique des espaces probabilisés) !

Exercice 2 – En commençant par choisir les deux éléments de même image, puis cette image, puis en attribuant les deux dernières images, je trouve $\binom{4}{2} \times 3 \times 2$.
Pour les joueurs : évaluer le nombre de surjections de $[\![1, 5]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$.

Exercice 3 – Même principe que plus haut ! La probbilité est finalement : $\dfrac{n\binom{n+1}{2}(n-1)!}{n^{n+1}}\cdot$

Exercice 4 – $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}\cdot$

Exercice 5 – La première paire est bicolore avec probabilité $\dfrac{n^2}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{n}{2n-1}\cdot$ Ensuite, probabilités composées pour trouver finalement $\dfrac{2^n n!^2}{(2n)!}\cdot$

Exercice 6 – $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^{\alpha}dt = \frac{1}{\alpha+1}$, ce qui est raisonnable pour $\alpha = 1$.

Exercice 7 – $p_1 = \frac{2}{5}$; $p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2$ (deux pairs, ou deux impairs), et sur le même principe : $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1-p_n)$. Et paf la suite arithmético-géométrique...

Exercice 8 – Je choisis la position des n « 1 ». Puis celle des n « 2 » parmi les $5n$ positions restantes... À la fin beaucoup de factorielles se simplifient, et je divise par 6^n. On finit avec Stirling.

Exercice 9 – $p_1 = \frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\frac{4}{7}$ puis $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1-p_n)$, et on cherche ℓ tel que $\ell = -\frac{6}{35}\ell + \frac{4}{7}\cdot$

Exercice 10 – « Tous » vs. « au moins un ». Le dernier ensemble peut se décrire, au choix, par « il existe des A_i qui sont vérifiés pour i arbitrairement grand » ou encore « il existe une infinité de A_i qui sont vérifiés ».

Exercice 11 – Bayeserie sur les événements « le trésor a été placé » et « il n'est pas dans les $N-1$ premiers coffres ».

Exercice 12 – Calculer la probabilité p_k pour qu'après son k-ème tir, Franz soit déclaré vainqueur.

Exercice 13 – $p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p$: encore une suite arithmético géométrique ; $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ (sans surprise).

Exercice 14 – $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et bien entendu (comme à l'exercice précédent) : $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

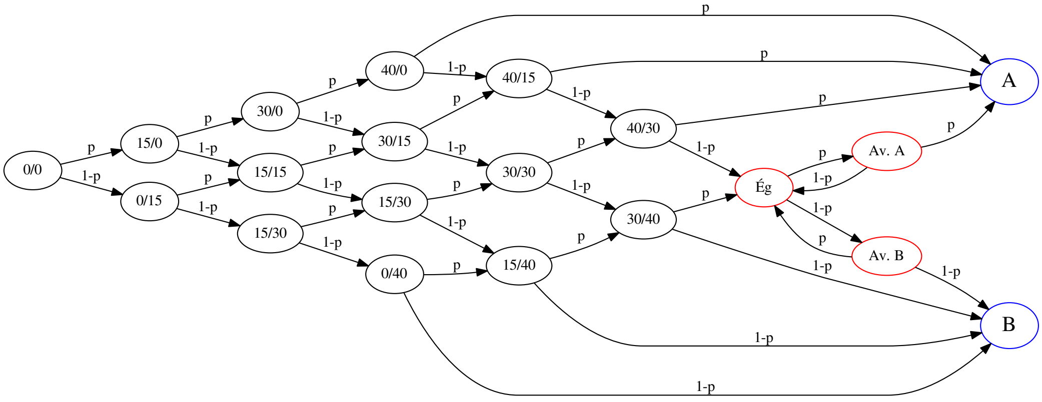
Exercice 15 – Attention, les veaux font *également* MEUHHH. Mes statistiques sont formelles : ce fait semble assez peu connu.

Exercice 16 – Notons p la probabilité pour que la taupe sorte à la première sortie rencontrée : $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-p)$... On peut aussi s'intéresser aux suites de mouvements conduisant à la bonne sortie :

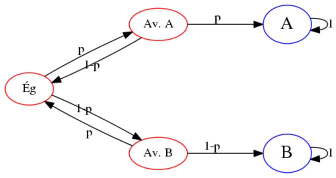
$$\{DGD, DG^3D, DG^5D, ...\} \cup \{GDG, GD^3G, ...\}$$

Exercice 17 – $A \cap \overline{B} = A \setminus (A\cap B)$ donc $\mathbb{P}(A\cap\overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B) = \cdots = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$.

Exercice 18 – Observer le graphe suivant, prendre un air surpris puis pensif puis intelligent.



Plus précisément, on évalue d'abord facilement les probabilités pour que le score passe par les « scores simples » (ceux par lesquels on ne passe au plus qu'une fois). Ensuite, on peut évaluer la probabilité pour qu'on passe au moins une fois par une égalité. Sous cette hypothèse, on évalue les probabilités de passage aux différents scores après n coups supplémentaires grâce au graphe suivant :



et au calcul de $\begin{pmatrix} 0 & p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 19 – Attention, l'intersection n'est pas vide : elle est réduite au singleton $\{1\}$. Ensuite, il y a vaguement de la continuité décroissante, puis la convergence s'obtient via le logarithme, bien entendu. Pour terminer, le point clé est que les A_p sont mutuellement indépendants, donc leur complémentaires aussi ! On obtient finalement une formule due à Euler :

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

Signalons enfin que le théorème des nombres premiers (non trivial !) dit : $p_n \sim n \ln n$.

Exercice 20 – Intersection décroissante... et $B = A$ est de probabilité nulle (on majore la probabilité de l'union par la somme des probabilités, et on est face à un reste de série convergente). La deuxième partie est plus délicate : on évalue la probabilité du complémentaire de l'union (qui est une union croissante), et on est ramené à des probabilités du type $\prod_{n=k}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_n))$ qui tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$... on va revoir ça à l'exercice suivant !

Exercice 21 – Z (donc ses parties réelle et imaginaire aussi) est d'espérance nulle, et pour l'argument je trouve une espérance de $\dfrac{n-1}{n}\pi$ qui me semble intuitivement raisonnable. La covariance est nulle... mais $\mathbb{P}\left(\mathrm{Re}(X) = 1 \text{ et } \mathrm{Im}\,(Z) > 0\right)$ me semble nulle (enfin, dès que $n \geqslant 3$) alors que...

Exercice 22 – $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et plus généralement, $T_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$, avec pour tout $k \geqslant n$:

$$\mathbb{P}(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

J'ai obtenu ça en conditionnant par T_{n-1}, et à la tête du résultat, j'ai trouvé une preuve « bien meilleure » (ça arrive souvent...).

En dérivant dans $]-1, 1[$ le DSE de $\dfrac{1}{1-t}$ j'obtiens (sans m'énerver et du premier coup...) $\dfrac{1}{(1-t)^n} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} t^{k-n}$ puis $\mathcal{G}_{T_n}(t) = \left(\dfrac{pt}{1-qt}\right)^n$ et enfin : $\mathbb{E}(T_n) = \mathcal{G}'_{T_n}(1) = \dfrac{n}{p}$, ce qui est raisonnablement intuitif (chaque attente du suivant étant indépendante de ce qui s'est passé avant...).

Ici, on doit pouvoir montrer que T_1, $T_2 - T_1$,..., $T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes et suivent chacune une loi géométrique de paramètre p, vous ne pensez pas ? Ça expliquerait tout...

Exercice 23 – Évidemment, $\mathbb{E}(Z_n) = (1-2p)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Il s'agit ensuite d'évaluer la probabilité pour qu'il y ait un nombre pair de k tels que $X_k = -1$ (CNS pour avoir $Z_n = 1$). Enfin, je trouve $\mathbb{P}(Z_1 = 1 \text{ et } Z_2 = 1) = \mathbb{P}(Z_1 = 1)\mathbb{P}(Z_2 = 1)$ si et seulement si $(1-p)((1-p)^2 + p^2) = (1-p)^2$, ce qui donne la condition nécessaire d'indépendance : $p = 1/2$; etc.

Exercice 24 – $(T_1 \leqslant T_2) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (T_1 = k \text{ et } T_2 \geqslant k)$ puis (en retrouvant rapidement $\mathbb{P}(T_2 \geqslant k) = q_2^{k-1}$) : $\mathbb{P}(T_1 \leqslant T_2) = \dfrac{p_1}{1 - q_1 q_2}\cdot$ En application numérique on trouvera $\dfrac{31}{60}\cdot$

Exercice 25 – $0 \leqslant X \leqslant Z$. Ensuite, $\mathcal{G}_Z(t) = t\mathcal{G}_X(t)^2 = \dfrac{pt}{1-qt}$ donc $\mathcal{G}_X(t) = \sqrt{p}(1-qt)^{-1/2}$; etc.

Exercice 26 – $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^2)$. Pour $k \geqslant 0$ je trouve $\mathbb{P}(W = k) = \dfrac{p^2 q^k}{1-q^2}$ (et par parité...). Toujours dans le cas $i \geqslant 0$, je trouve :

$$\mathbb{P}(Z = k \text{ et } W = i) = p^2 q^{2k+i-2} = \mathbb{P}(Z = k)\mathbb{P}(W = i)$$

Exercice 27 – On écrira bien entendu $(X = x) = \bigsqcup_{n=x}^{\infty} (X = x \text{ et } N = n)$ avant de passer aux probabilités... C'est surprenant, mais oui : X et Y sont bien indépendantes ! Ce ne serait évidemment pas le cas si $X + Y$ était une constante...

Exercice 28 – $\mathbb{P}(X = n+1) < \mathbb{P}(X = n)$ quand $\lambda < n+1$ (i.e. $n \geqslant 4$) et $\mathbb{P}(X = n+1) > \mathbb{P}(X = n)$ quand $n \leqslant 3$, donc le maximum est pris en 4.

Exercice 29 – Pour la première inégalité, et puisque $t \geqslant 1$ implique $t^n \geqslant t^a$ pour $n \geqslant a$, on a :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n \geqslant \sum_{n \geqslant a} \mathbb{P}(X = n)t^a = t^a \sum_{n \geqslant a} \mathbb{P}(X = n) = t^a \mathbb{P}(X \geqslant a).$$

Pour la deuxième, le minimum de $t \mapsto t - 1 - 2\ln(t)$ est pris en 2...

Exercice 30 – $Y - 1$ suit une loi géométrique (on attend un premier succès dans des expériences de Benoulli indépendantes de probabilité de succès (obtenir autre chose que le premier numéro) est de $2/3$. On a donc $\mathbb{E}(Y) = 1 + 3/2$. Ensuite, à $Y = y$ fixé, $Z - Y$ suit à nouveau une loi géométrique : on attend un succès dans une expérience de Bernoulli de probabilité de succès $1/3$.

Exercice 31 – Les cas limites nous donnent respectivement une loi uniforme (espérance $\dfrac{N+1}{2}$) et une loi constante (espérance N). Si on regarde seulement les couleurs des N tirages (on les poursuit jusqu'à la fin), le résultat peut être vu comme une partie à r éléments parmi N (les positions des blanches). J'obtiens finalement : $\mathbb{E}(X) = r\dfrac{\binom{N+1}{r+1}}{\binom{N}{r}}$, qui est cohérent avec les cas limites.
Note : il m'a fallu quelques instants... puis un mini-calcul pour me convaincre que les $\binom{N}{r}$ « colorisations » étaient équiprobables

Exercice 32 – Je trouve respectivement $1/3$ et $-2/9$.

Exercice 33 – $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q^{k-1}p)$ (conditionner selon X_{k-1} ; l'essentiel est compris quand on a traité X_2...). On peut évaluer Y_k en pensant à la probabilité, pour une personne donnée de n'avoir jamais répondu au téléphone ; on trouve ainsi : $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^k)$

Exercice 34 – Bien entendu, G est constante égale à 1. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(F = k) = \dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ ($F + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$) et pour $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(E = k) = \mathbb{P}(F = k-1) = \dfrac{1}{2^k}$ ($E \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$). On en déduit : $\mathbb{E}(G) = 1$, $\mathbb{E}(F) = 1/(1/2) - 1 = 1$: il y a en moyenne une fille et un garçon par foyer ; et donc deux enfants en moyenne : $\mathbb{E}(E) = 2$. La dernière espérance demandée vaut :

$$\mathbb{E}(1/E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = -\ln(1 - 1/2) = \ln 2.$$

Après avoir été un peu surpris, il n'y a rien de choquant à ce que la moyenne des inverses ne soit pas égale à l'inverse de la moyenne !

Exercice 35 – Relier $X(f)$ aux $X_i(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in f(\llbracket 1, m \rrbracket) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 36 – On montre plus précisément que U possède une espérance si et seulement si la série du membre de droite est convergente. Pour cela, les familles sommables sont bien utiles, puisque dans $[0, +\infty]$ on peut écrire en notant $x_{i,j} = \begin{cases} \mathbb{P}(X = i) & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$:

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=j}^{+\infty} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant j)$$

M_n est $\leqslant k$ si et seulement si $X_1, ..., X_n$ sont tous $\leqslant k$ (événements indépendants). Enfin, je suis égal à 3 si et seulement si je suis $\leqslant 3$ sans être $\leqslant 2$...

Exercice 37 – En décomposant en série entière les deux termes, il suffit ensuite de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n)! \geqslant 2^n n!$.

Exercice 38 – Je trouve (à vérifier...) : $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq(q - p)$ (la covariance est nulle si $\ell \geqslant k + 1$) sans réussir à me convaincre de la validité du signe dans les cas limites où p est proche de 0 ou 1, hélas. Je terminerais bien avec Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 39 – Je trouve $p_{n+3} - p_{n+2} = -p^2 q p_n$. Ensuite, $X^3 - X^2 + p^2 q = (X - p)(X^2 + \cdots)$. Le candidat a été cuisiné sur les récurrences linéaires d'ordre 2, et la généralisation raisonnable à l'ordre 3.

Exercice 40 – T_n est de moyenne nulle et d'écart type 1. Les limites sont celle attendues (par ceux qui savent !), à savoir $\mathrm{e}^{(\ln^2 x)/2}$ et $\mathrm{e}^{-x^2/2}$, mais pour la deuxième limite je serais curieux de savoir comment l'auteur du sujet procède...

Exercice 41 – $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{tr}(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $\det(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(p^n)$. Les sous-espaces propres ont même dimension si et seulement si on a tiré autant de 0 que de 1, ce qui est impossible si n est impair, et arrive avec probabilité $\binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}$ si n est pair. Enfin, le spectre de $D + N$ est celui de N, donc est inclus dans $\{0, 1\}$, donc $N + D$ est diagonalisable si et seulement si $(N + D)^2 = N + D$... ce qui est impossible (poser le début du calcul, plutôt que de faire ces yeux ronds en lisant ce corrigé !).

Exercice 42 – Pfff... $\mathbb{E}(X_n) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$!

Exercice 43 – Les deux solutions de l'équation caractéristique ont leur partie réelle strictement négative si et seulement si c'est la cas de leur somme, c'est-à-dire : $1 - A < 0$. Ici, $\mathbb{P}(A > 1) = 1 - p$.

Exercice 44 – Déjà, M est symétrique réelle avec probabilité $1-p$. Il reste ensuite à estimer la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ -X_2^2 & X_1^2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable (resp. : à spectre dans $\mathbb{R}$) ; il me semble que c'est la même condition, à savoir : $X_2 = 0$ (sinon, le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle).

Exercice 45 – Chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(\sigma(i) = i) = \dfrac{1}{n}$ (dénombrement), or $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, donc, même si ces variables ne sont pas indépendantes, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \dfrac{n}{n} = 1$.

Exercice 46 – C'est fondamentalement du Pythagore ! Partir de $X - m = (X - \mathbb{E}(X)) + (\mathbb{E}(X) - m)$, mettre au carré et « espérer »...