Espaces préhilbertiens

1 Espaces préhilbertiens

1.1 Produits scalaires, orthogonalité

Exercice 1 – *Keyword : densité [8/10]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0,1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que $(f,g)\mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f(u_n)g(u_n)}{2^n}$ soit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 2 – *Centrale 2007 [3/10]*
Soient F et G deux sous-espaces de E euclidien. Montrer : $(F+G)^\perp = F^\perp\cap G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 3 – *CCP 2015 [4/10]*
On définit, pour $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$.

1. Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Soient $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $N\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\langle M|N\rangle = 0$.
3. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer :
$$\operatorname*{Inf}_{S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,j}-s_{i,j})^2$$

Exercice 4 – *Décomposition OT ; aka QR [7/10]*

1. Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ trois bases d'un même espace E. Exprimer $\underset{\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_3}{\operatorname{Pas}}$ à l'aide de $\underset{\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_2}{\operatorname{Pas}}$ et $\underset{\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_3}{\operatorname{Pas}}$.
2. Soit $P\in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O\in O_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $P=OT$.
3. Exemples : $P=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}$ puis $P=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}8&25&-22\\-4&-8&-7\\1&11&-14\end{pmatrix}$.

Exercice 5 – *Mines 2010 ; archi classique [7/10]*
Soit E euclidien. Montrer qu'un projecteur de E est orthogonal si et seulement pour tout $x\in E$, $\|p(x)\|\leqslant\|x\|$.

Exercice 6 – *On vous avait prévenu... [5/10]*
Trouver la borne inférieure, pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, de
$$\int_0^\pi\big(\cos t-(at+b)\big)^2dt.$$

Exercice 7 – *Peut-être une forme linéaire ? [3/10]*
Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $Q\in\mathbb{R}_n[X]$,
$$Q(945)-1515Q'(42)=\int_{2016}^{2048}P(t)Q(t)\sin^2 t\,dt.$$

Exercice 8 – *IMT 2016 [5/10]*
L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer la matrice A dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan normal à $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

Exercice 9 – *TPE 2016 [8/10]*
Soient F et G les sous-espaces de l'espace euclidien E engendrés respectivement par $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$. On suppose :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$$

1. Montrer que $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $(y_1, ..., y_n)$ l'est.
2. Montrer que F et G ont même dimension.

1.2 Quelques calculs supplémentaires

Exercice 10 – *Mines 2022 [5/10] - Paul H.*
Calculer la borne inférieure de $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^4 - at^2 - bt - c)^2 dt$, lorsque (a,b,c) décrit $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 – *Une orthonormalisation [3/10]*
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, orthonormaliser la base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$, avec $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,-1,1)$ et $f_3 = (1,0,0)$.

Exercice 12 – *Une projection dans $\mathbb{R}^3$ [3/10]*
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $D = \mathbb{R}(1,-2,1)$.
Trace de la matrice obtenue ?

Exercice 13 – *CCP 2010 (PC) [5/10]*
Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, on note

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x + 2y + z = 0 \text{ et } x + y + z + t = 0\}.$$

Donner une base de F et une base de $F^\perp$.

Exercice 14 – *TPE 2013 (MP) [5/10]*
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces des matrices antisymétriques (resp. symétriques).

1. Montrer que pour le produit scalaire usuel, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont des supplémentaires orthogonaux.
2. Calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2 & \dots & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_n$.

1.3 Polynômes orthogonaux

Exercice 15 – *Polynômes de Legendre ; Mines 2016 [8/10]*

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour :

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

2. Montrer que les polynômes de Legendre ($P_n = \dfrac{1}{n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$) constituent une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
3. En dehors de toutes considérations d'orthogonalité, montrer que P_n possède n racines simples dans $]-1,1[$.
4. Déterminer $\|P_n\|^2$.

Exercice 16 – *Polynômes de Tchebychev de première espèce [7/10]*

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour :

$$\langle P|Q\rangle = \int_{]-1,1[} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

2. Montrer que les polynômes de Tchebychev de première espèces ($T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$) constituent une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer les racines de T_n.

Exercice 17 – *Polynômes d'Hermite [8/10]*

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour :

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}dt.$$

2. Montrer que les polynômes de Hermite ($H_n(x) = (-1)^2\mathrm{e}^{x^2/2}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)^{(n)}$) constituent une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
3. En dehors de toutes considérations d'orthogonalité, montrer que L_n possède n racines simples réelles.

Exercice 18 – *Racines des polynômes orthogonaux [8/10]*
Soit w une application continue par morceaux intégrable à valeurs strictement positives sur un intervalle **borné** I.

1. Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P|Q\rangle = \int_I P(t)Q(t)\varphi(t)dt.$$

2. Montrer qu'il existe une unique base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, échelonnée en degrés, orthogonale, et constituée de polynômes unitaires.
3. Montrer que chaque P_n admet exactement n racines simples dans I.

2 Isométries vectorielles, matrices orthogonales

2.1 Généralités

Exercice 19 – *CCP 2016 [6/10]*
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ préserve l'orthogonalité :

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle x|y\rangle = 0 \implies \langle f(x)|f(y)\rangle = 0$$

1. Que dire de $(f(e_1), ..., f(e_n))$?
2. On considérant $\langle f(e_i) + f(e_j)|f(e_i) - f(e_j)\rangle$, montrer que les $f(e_i)$ ont tous la même norme.
3. Trouver une décomposition de f en deux endomorphismes connus.

Exercice 20 – *Mines 2010 (MP) [5/10]*
Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n.$$

Exercice 21 – *Telecom Sud-Paris (INT) [5/10]*
Soit F les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par : $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \end{cases}$

1. Donner la dimension de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 22 – *TPE [6/10]*
Calculer le cardinal de $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 23 – *Mines 2008 [3/10]*
On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, du produit scalaire canonique $\langle .|. \rangle$ et de sa norme euclidienne $\|.\|$ associée. Pour $u \in E$ unitaire et $a \in \mathbb{R}^*$, on définit $f_a : x \mapsto x + a\langle u|x \rangle u$.

1. Montrer que $f_a \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f_a(x)\| = \|x\|$. Montrer qu'on a alors $\mathrm{Ker}\,(f_a - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f_a + \mathrm{Id}_E) = E$.
3. Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique. Préciser ses éléments propres.

2.2 En dimension 2

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Exercice 24 – *Une réflexion [2/10]*
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la réflexion par rapport à $\mathbb{R}(2e_1 + e_2)$.

Exercice 25 – *Un angle... [2/10]*
Déterminer l'angle orienté $\widehat{(a, b)}$ si $a = 3e_1 + 4e_2$ et $b = e_1 - 2e_2$.

Exercice 26 – *Vos papiers ! [2/10]*
Donner la nature précise des endomorphismes de E dont les matrices dans une base orthonormée directe sont respectivement $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3 En dimension 3

Exercice 27 – *Division vectorielle [7/10]*
Soient $a, b \in E$ (espace euclidien de dimension 3). Déterminer l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $a \wedge x = b$.
On pourra commencer par une petite analyse – éventuellement informelle – donnant des conditions nécessaires simples portant sur a et b.

Exercice 28 – *Écarts angulaires [1/10]*
Déterminer les écarts angulaires mutuels entre les 3 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $e_1 + e_2$, $e_1 - e_3$, $3e_1 + 4e_2$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 29 – *Une réflexion [3/10]*
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à l'hyperplan $(2e_1 + e_2)^\perp$.

Exercice 30 – *Une rotation [6/10]*
Donner la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1 + e_3$ (resp. $e_1 - e_3$) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (resp. $\dfrac{\pi}{3}$).

Exercice 31 – *CCP 2016 [6/10]*
Caractériser complètement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (euclidien) canoniquement associé à :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 32 – *CCP 2016 (deux fois) [6/10]*
Caractériser complètement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (euclidien) canoniquement associé à :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 – *Mines 2010 (MP) [8/10]*
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ appartient à $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $t \in [0, 4/27]$ tel que a, b et c soient les racines de $X^3 - X^2 + t$.

3 Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 34 – *Un autre classique [8/10]*
Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure, lorsuqe (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, du rapport :

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2 + 2xz + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Indication : c'est peut-être de la forme $\dfrac{X^{\mathrm{T}}AX}{X^{\mathrm{T}}A}$, *ou encore* $\dfrac{\langle u(x)|x\rangle}{\|x\|^2}\cdots$

Exercice 35 – *Mines 2013 [7/10]*
Soit E un espace euclidien. Pour $v_1, ..., v_p \in E$, on définit :

$$\mathcal{G}(v_1, ..., v_p) = ((\langle v_i|v_j\rangle))_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

(matrice de Gram).

1. Montrer que si $(v_1, ..., v_p)$ est liée, alors $\det(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p)) = 0$.
2. Montrer la réciproque.
3. Montrer que si $x \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$, alors :

$$d(x, F)^2 = \frac{\det(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p, x))}{\det(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p))}$$

Exercice 36 – *Adjoint d'un endomorphisme [8/10]*

1. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v de E tel que :

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|v(y)\rangle.$$

   v s'appelle l'*adjoint* de u, et est noté u^*.

2. Déterminer u^* lorsque u est une homothétie, une projection orthogonale ou une symétrie orthogonale.
3. Que dire de u^* lorsque u est symétrique ?
4. Que dire de $(\lambda u_1 + u_2)^*$? Le prouver soigneusement !
5. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale. Si $U = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$, montrer : $\mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{B}) = {}^tU$.

Exercice 37 – *Un endomorphisme symétrique [6/10]*
Sur $E = \mathcal{C}^\infty([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$, montrer que l'endomorphisme

$$\varphi : f \mapsto \big[x \mapsto (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x)\big]$$

est autoadjoint.

Exercice 38 – *CCP 2008 [4/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Expliciter $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{\mathrm{T}}AP$ soit diagonale.

Exercice 39 – *Une ortho-réduction [5/10]*
« Réduire en base orthonormée » [1] la matrice $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 40 – *Somme de carrés [7/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (comptées avec leur multiplicité). Montrer : $\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum \lambda_i^2$.

Exercice 41 – *CCP 2012 (MP) [8/10]*
Soient f et g autoadjoints tels que $f^3 = g^3$. Montrer que $f = g$.
NDLR : il semblerait que les trois propositions de preuves (dont deux étaient tout de même justes !) aient été rejetées par l'examinateur. Heureusement, le candidat n'était pas caractériel !

Exercice 42 – *TPE 2014 (MP) [7/10]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des matrices symétriques S telles que

$$S^3 + 3S - 4I_n = M$$

Exercice 43 – *IMT 2015 [6/10]*
Déterminer les matrices carrées complexes 2×2 symétriques non diagonalisables.

Exercice 44 – *IMT 2015 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que $\dfrac{\mathrm{tr}^2(A)}{\mathrm{tr}(A^2)} \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

4 Indications, solutions partielles

Exercice 1 – Si l'ensemble des valeurs prises par (u_n) n'est pas dense dans $[0,1]$, on doit pouvoir trouver une fonction f non nulle telle que $\langle f|g\rangle = 0$.

1. Formulation calamiteuse qui n'est évidemment pas de moi !

Exercice 2 – C'est du cours. L'une des quatre inclusions réclame un argument dimensionnel.

Exercice 3 – $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux supplémentaires orthogonaux. Un dessin plus tard, on voit que Pythagore pourrait être d'un certain intérêt. Et comme on connaît explicitement la décomposition d'une matrice selon les deux supplémentaires préalablement cités...

Exercice 4 – C'est du cours... et les exemples ont été construits (comment, à votre avis ?) pour que les calculs soient raisonnables !

Exercice 5 – Un dessin et un résultat du collège fournit un sens. Pour l'autre, on fixe $x_1 \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\,(p)$, et on peut s'intéresser à $p(\lambda x_1 + x_2)$: on a une information sur (le carré de) sa norme, puis on fait vivre λ.

Exercice 6 – Géométrisation standard. Quelques intégrations par parties un peu lassantes seront probablement nécessaires pour mener à bien les calculs.

Exercice 7 – Dans ma boule de cristal, je vois une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Je vois également un produit scalaire.

Exercice 8 – Par exemple (après un dessin) via $p(x) = x - \dfrac{\langle x|n\rangle}{\|n\|^2}n$. On vérifiera que cette matrice évidemment symétrique possède la bonne trace...

Exercice 9 – Les deux implications sont symétriques. Pour le sens direct par exemple, on raisonne par la contraposée en supposant que y_1 est combinaison linéaire de $y_2, ..., y_n$: $y_1 - \sum \alpha_i y_j$ est nul donc orthogonal à chaque y_i ; il en va alors de même pour $x_1 - \sum \alpha_j x_j$. Pour la deuxième question, extraire une base de F : elle fournit une famille libre des (x_i) donc des (y_i), prouvant $\dim(F) \leqslant \dim(G)$; puis on retourne l'argument.

Exercice 10 – Après avoir fait un dessin et géométrisé la situation, il s'agit de projeter orthogonalement X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Je déconseille l'orthonormalisation dans ce cas : je chercherais plutôt (a, b, c) tel que $X^4 - (aX^2 + bX + c)$ soit orthogonal à 1, X et X^2 : trois équations à trois inconnues. Ensuite, il reste à calculer le carré d'une norme, qui est également un produit scalaire...

Exercice 11 – À la fin, merci de vérifier que votre base est bien orthonormée...

Exercice 12 – Après un dessin : $p(x) = \dfrac{\langle x|d\rangle}{\|d\|^2}d$... et on vérifie que la trace vaut bien 1.

Exercice 13 – F est vendu comme l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, donc $F^\perp$ est gratuit. Pour une base de F, résoudre un système à deux équations et 4 inconnues.

Exercice 14 – Le point de vue le plus éclairant consiste probablement à considérer l'application $\Phi : M \mapsto M^{\mathrm{T}}$: c'est une involution linéaire, donc une symétrie... Cela fournit en particulier la décomposition explicite de toute matrice selon ces deux sous-espaces, ce qui sera utile lors du calcul de distance.

Exercice 15 – Pour l'orthogonalité, intégrer n fois par parties dans $\langle X^k|P_n\rangle$, avec $k < n$. Ensuite, rolliser pour obtenir de plus en plus de racines pour $((X-1)^n(X+1)^n)^{(k)}$ en n'oubliant pas la caractérisation de l'ordre de multiplicité des racines d'un polynôme. Pour la norme, réfléchir à la valeur de $\langle P_n|X^n\rangle$ (d'une part, d'autre part...).

Exercice 16 – Changement de variable $t = \cos\theta$; racines : les $\cos\left((2k+1)\dfrac{\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ (sans raisonnement par équivalence donc pourri...).

Exercice 17 – IPP, Rolle, ordre de multiplicité, récurrence.

Exercice 18 – Raisonner par l'absurde, noter $x_1, \ldots, x_r$ les racines de P_n *de multiplicité impaire* incluses dans I, puis considérer $\langle P_n|Q\rangle$, où $Q = (X - x_1)\ldots(X - x_r)$.

Exercice 19 – La famille à l'arrivée est bien entendu orthogonale, et avec l'indication on montre que les images des vecteurs de la base initiale ont tous la même norme, disons α. Si $\alpha \neq 0$ (sans quoi...), alors $f = (\alpha \mathrm{Id}) \circ g$, avec g un automorphisme orthogonal.

Exercice 20 – Cauchy-Schwarz entre $v = e_1 + \cdots + e_n$ et $u(v)$

Exercice 21 – F nous est vendu comme un orthogonal ; on a donc directement une base de $F^{\perp}$. On vérifie à la fin la trace.

Exercice 22 – Chaque colonne est constituée de $n-1$ « 0 » et d'un « ± 1 ». Mais c'est le cas aussi pour chaque ligne : on doit donc choisir la permutation qui place en $(sigma(i), i)$ le terme non nul de chaque colonne. Finalement, on obtient $2^n n!$ telles matrices.

Exercice 23 – Travailler dans une base adaptée.

Exercice 24 – $s(x) = x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) + 2x_1 = -x + 2\dfrac{\langle x|d\rangle}{\|d\|^2}d$...

Exercice 25 – Cosinus et sinus sont connus via le produit scalaire et le produit mixte.

Exercice 26 – Je verrais bien la rotation d'angle Arccos(3/5) et la réflexion par rapport... à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id})$!

Exercice 27 – On peut travailler géométriquement (analyse : il faut déjà avoir a et b orthogonaux...). On peut aussi travailler de façon analytique, en calculant dans une base orthonormée raisonnable... après avoir évacué les cas où a et b ne sont pas orthogonaux.

Exercice 28 – Donné par le cosinus, donné par le produit scalaire et les normes.

Exercice 29 – Voir l'exercice **??**. On vérifiera que la trace vaut... ce qu'il faut.

Exercice 30 – Au choix, $r(x) = ...$ ou bien passer par une (autre) base orthonormée puis revenir à la canonique. Vérifier la trace à la fin, ainsi que le caractère orthogonal.

Exercice 31 – C'est un endomorphisme orthogonal (trois produits scalaires, trois normes), de déterminant 1 ($u(e_1) \wedge u(e_2) = +u(e_3)$) donc une rotation d'axe $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$. En regardant la trace on obtient le cosinus de l'angle. En orientant l'axe par exemple par n dirigeant $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et en fixant $x \perp n$, le signe du sinus sera celui de $\langle u(x)|n \wedge x\rangle$.

Exercice 32 – Voir l'exercice précédent !

Exercice 33 – Classique (sans être facile)... Relations coefficients/racines ; conditions d'orthogonalité $\langle f_i|f_j\rangle = \delta_{i,j}$, déterminant, et brassage d'air algébrique. Équivalences « déconseillées ». Dans le sens direct, on localise t en étudiant tout bêtement les variations du polynôme, qui doit posséder trois racines réelles (comptées avec leur multiplicité).

Exercice 34 – On sait que le rapport en question est compris entre les deux valeurs propres extrémales de la matrice symétrique (l'endomorphisme autoadjoint) en question, et que ces valeurs sont atteintes en considérant des vecteurs propres associés...

Exercice 35 – Que se passe-t-il quand on réalise l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - \sum\limits_{k=2}^{p} \alpha_k C_k$ dans la matrice de Gram ?

Exercice 36 – La clé est le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien. Ensuite, on fixe et libère x et y dans un bon ordre après avoir établi des relations de la forme

$$\langle x|u^*(y)\rangle = \langle u(x)|y\rangle = \cdots = \langle x|v(y)\rangle$$

Exercice 37 – Intégrer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 1) f''(x) g(x) dx$ par parties en primitivant f''.

Exercice 38 – Si on ouvre les yeux, on trouve que la matrice ressemble furieusement à une matrice orthogonale rencontrée n fois ($n \geqslant 5$) : $\frac{1}{3}A$ est orthogonale et symétrique ; c'est la matrice d'une symétrie orthogonale (et même d'une réflexion, d'après la trace). Il reste à déterminer le noyau de $A - 3I_3$ (c'est une droite) et celui de $A + 3I_3$ (un plan).

Exercice 39 – Mouais... Je trouve comme valeurs propres 3, 6 et 9...

Exercice 40 – Le membre de gauche vaut $\sum_{j=1}^{n} \|u(e_j)\|^2$. On décompose calmement chaque e_j dans une base (orthonormée) de diagonalisation de u, on échange les deux sommes, etc.

Exercice 41 – Notons $h = f^3$ (et oublions provisoirement g). Puisque h est autoadjoint, il est diagonalisable en base orthonormée. Et comme f et h commutent, les sous-espaces propres de h sont stables par f. Ensuite, la restriction de f à chaque sous-espace propre de h est autoadjointe, donc diagonalisable. Mais comme h est connu sur ces sous-espaces propres, on obtient une seule valeur possible pour f sur ces sous-espaces (l'équation $\lambda^3 = \mu$ (d'inconnue réelle λ) n'a pas le même comportement que l'équation $\lambda^2 = \mu$!). Mais g vérifiant les mêmes hypothèses, vaut la même valeur que f sur chaque sous-espace propre de h...

Exercice 42 – Je serais bien tenté par une analyse-synthèse. Déjà, il est probablement nécessaire que M soit symétrique ; et sous cette hypothèse, en supposant l'équation vérifiée et après géométrisation, on a deux endomorphismes qui commutent ; je serais alors tenté de regarder les restrictions de l'un aux sous-espaces propres de l'autre : ne seraient-elles pas diagonalisables ? Etc.

Exercice 43 – Si une telle matrice est non diagonalisable, alors elle possède une seule valeur propre, donc le discriminant du polynôme caractéristique est nul ; etc. Je trouve finalement comme solutions l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & i(\alpha-\beta)/2 \\ i(\alpha-\beta)/2 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$.

Exercice 44 – Les trois quantités sont des invariants de similitudes : elles ne dépendent que de l'endomorphisme canoniquement associé... qu'on préférera regarder dans une base orthonormée de diagonalisation. Il s'agit alors de montrer : $\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\right)^2 \leqslant r \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2$. Vous ne reniflez pas du Cauchy-Schwarz ?