Marches d'ivrognes

(d'après Agro-véto 2014) – à rendre le jeudi 1er février 2024

Dans tout le problème, p désigne un nombre réel appartenant à $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On s'intéresse à une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: un ivrogne part de l'origine 0 (disons : le bar) à l'instant $n = 0$, et effectue dans une rue rectiligne des pas (chaloupés) successifs soit d'une unité vers la droite (avec la probabilité p), soit d'une unité vers la gauche (avec la probabilité q). Si à un instant donné il se trouve au point d'abscisse $i \in \mathbb{Z}$, il sera à l'instant suivant au point d'abscisse $i+1$ avec la probabilité p, ou au point d'abscisse $i-1$ avec la probabilité q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du point où se trouve l'ivrogne à l'instant n.
Cela définit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Les problèmes qui vont nous intéresser sont :

- Quelle est la loi de X_n ?
- Avec quelle probabilité l'ivrogne va-t-il retourner au bar ?
- Dans le cas symétrique $p = q = 1/2$, à quelle fréquence retourne-t-il au bar ?

On pourra utiliser les résultats suivants :

- la formule de Stirling : lorsque n tend vers $+\infty$, $n!$ est équivalent à $\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$;
- le lemme des coalitions : si $Z_1, ..., Z_n$ sont des variables aléatoires globalement indépendantes, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, et si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ sont des applications, alors $X = f(Z_1, ..., Z_k)$ et $Y = g(Z_{k+1}, ..., Z_n)$, sont indépendantes.

Question préliminaire sobre

Rappeler le développement en série entière de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ au voisinage de l'origine 0.
On précisera le rayon de convergence de la série entière et on exprimera ses coefficients à l'aide des $\dbinom{2n}{n}$ *, pour* $n \in \mathbb{N}$.

1 Premières propriétés des X_n

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = X_n - X_{n-1}$. Les variables U_n $(n \in \mathbb{N})$ sont supposées mutuellement indépendantes.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de U_k, son espérance et sa variance.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} U_i$. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Soient k et ℓ dans $\mathbb{N}$ tels que $k > \ell$. Montrer que les variables aléatoires $X_k - X_\ell$ et X_ℓ sont indépendantes.
   En déduire :
   $$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{P}(X_k = n \,|\, X_\ell = m) = \mathbb{P}(X_k - X_\ell = n - m),$$
   où $\mathbb{P}(X_k = n \,|\, X_\ell = m)$ désigne la probabilité conditionnelle de $(X_k = n)$ sachant $(X_\ell = m)$.
   Prouver enfin :
   $$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{P}(X_k = n \,|\, X_\ell = m) = \mathbb{P}(X_{k-\ell} = n - m),$$

2 Probabilité d'être au bar

On s'intéresse aux probabilités pour l'ivrogne d'être au bar à un instant donné.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut $\mathbb{P}(X_{2k+1} = 0)$? *On définit dorénavant, pour $k \in \mathbb{N}$:*
$$a_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0).$$
2. Montrer :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_k = \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k.$$
3. Pour deux entiers $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in [\![-k, k]\!]$, déterminer plus généralement $\mathbb{P}(X_{2k} = 2\ell)$.
4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ en fonction de p, et vérifier que $R \geqslant 1$.
5. Pour $z \in]-1, 1[$, on pose
$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$
Montrer que pour tout $z \in]-1, 1[$, $A(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqz}}$.

3 Probabilité de repasser au bar

On s'intéresse à la probabilité pour que l'ivrogne repasse au moins une fois par le bar (et si oui, quand ?).

On note T la variable aléatoire définie par :

$$T = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 0\} & \text{si } \{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 0\} \text{ n'est pas vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

T s'interprète comme le temps de premier retour de l'ivrogne au bar.

Le but de cette question est de déterminer la loi de T. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$t_k = \mathbb{P}(T = 2k)$$

1. Calculer t_1.
2. Montrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, l'événement $(T = 2k)$ est indépendant de l'événement $(X_{2n} - X_{2k} = 0)$.
3. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} t_k.$$
On convient désormais de poser $t_0 = 0$, de sorte que la relation précédente devient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} t_k.$$
4. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} t_n z^n$ est supérieur ou égal à 1, et que sa somme $G(z)$ vérifie :
$$\forall z \in]-1, 1[, \qquad A(z) - 1 = A(z)\, G(z).$$
En déduire l'expression de $G(z)$ pour $z \in]-1, 1[$.

5. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad t_n = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$
Indication : on pourra commencer par calculer $G'(z)$.
6. Montrer que G est définie et continue sur $[0,1]$.
En déduire *soigneusement*[1] que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} t_n = 1 - |2p-1|$.
7. Montrer que l'ivrogne repassera au bar avec probabilité 1 si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.
8. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, la variable aléatoire T est-elle d'espérance finie ? Commentaires ?

4 Fréquence de passage au bar

On se place ici dans le cas équilibré : $p = 1/2$. L'ivrogne va donc repasser au bar presque sûrement. On va voir qu'il va même repasser (presque sûrement) une infinité de fois, et évaluer avec quelle « fréquence asymptotique ».

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n la variable aléatoire égale au nombre de passages de l'ivrogne au bar entre les instants 1 et $2n$.

1. Exprimer R_n à l'aide des fonctions indicatrices des évènements $(X_{2k} = 0)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$:
$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{2k} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. En déduire :
$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}.$$
3. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n},$$
et en déduire un équivalent de $\mathbb{E}(R_n)$ lorsque $n \to +\infty$.
Que dire de la fréquence moyenne $\dfrac{\mathbb{E}(R_n)}{n}$ de passages au bar lorsque n tend vers $+\infty$?

1. Pour tout le reste de la copie, vous pouvez faire n'importe quoi !