Mines 2017 - PSI2
Endomorphismes échangeurs : un corrigé

A. Quelques considérations en dimension 2

1. La trace est linéaire et donc pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Tr}(-u) = -\text{Tr}(u)$. Si u vérifie **(C3)** alors $u = -u$ et donc $\text{Tr}(u) = -\text{Tr}(u)$ et la trace est donc nulle.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ vérifie } \textbf{(C3)} \text{ alors } \text{Tr}(u) = 0}$$

2. E étant de dimension 2, $\chi_u = X^2 - \text{Tr}(u)X + \det(u) = X^2 - \delta^2$. Ce polynôme annulant u (Cayley-Hamilton) on en déduit que $u^2 = \delta^2 \text{Id}_E$.
Le spectre est l'ensemble des racines de χ_u et vaut ici $\{\delta, -\delta\}$. On a deux valeurs propres en dimension 2 et comme les sous-espaces propres sont en somme directe, il ne peuvent qu'être de dimension 1.

$$\boxed{u^2 = \delta^2 \text{Id}_E,\ \text{Sp}(u) = \{\delta, -\delta\},\ \dim(E_\delta(u)) = \dim(E_{-\delta}(u)) = 1}$$

3. Notons e_+ un vecteur propre pour δ et e_- un vecteur propre pour $-\delta$. Ces vecteurs sont indépendants et on a
$$u(e_+ + e_-) = \delta(e_+ - e_-)$$
$D = \text{Vect}(e_+ + e_-)$ est une droite (car $e_+ + e_- \neq 0$) et elle n'est pas stable par u (car $\delta \neq 0$ et $(e_+ + e_-, e_+ - e_-)$ est libre car (e_+, e_-) l'est). On a donc $u(D) \not\subset D$.
Posons $F = D$ et $G = u(D)$. Ce sont des droites (car u est inversible et conserve la dimension) non égales et donc en somme directe (intersection réduite à $\{0\}$). Par dimension, ce sont des supplémentaires de E. Par définition, $u(F) = G$. De plus $u(G) = u^2(F) = \delta^2 F = F$. Ainsi,

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

4. Un cacul par blocs montre que
$$\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$
On montre de même que
$$\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} \text{ est somme de deux matrices de carré nul}}$$

5. On vérifie par un calcul par blocs, par exemple, que
$$D^2 = I_n$$
D est donc inversible et est son propre inverse. Le calcul par blocs donne aussi
$$DMD^{-1} = DMD = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} = -M$$
Par définition de la similitude,

$$\boxed{M \text{ et } -M \text{ sont semblables}}$$

6. $u(F) \subset G$ indique qu'il y a un bloc de 0 en haut à gauche.
   $u(G) \subset F$ indique qu'il y a un bloc de 0 en bas à droite.
   Finalement

$$\boxed{\exists A, B /\ Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}}$$

7. Si F et G sont non nuls, la question 4 montre que u vérifie (C_2) en utilisant l'isomorphisme entre endomorphisme et matrice associée dans la base B. La question 5 montre de même que u et $-u$ sont semblables.
   Si F est nul, alors $G = E$ et $\text{Im}(u) = u(G) \subset F = \{0\}$. u est l'endomrophisme nul qui vérifie immédiatement **(C2)** et **(C3)**. C'est la même chose si $G = \{0\}$ (travailler alors avec $F = E$).

$$\boxed{u \text{ vérifie } \mathbf{(C2)} \text{ et } \mathbf{(C3)}}$$

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

8. Si $x \in \text{Im}(f)$, il existe y tel que $x = f(y)$ et donc $f(x) = f^2(y) = 0$. Ainsi $x \in \ker(f)$. Par théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \leq 2\dim(\ker(f))$$

   On a donc

$$\boxed{\text{Im}(f) \subset \ker(f) \text{ et } \dim(\ker(f)) \geq \frac{\dim(E)}{2}}$$

9. Soit $x \in \ker(a) \cap \ker(b)$. On a $u(x) = a(x) + b(x) = 0$ et comme u est injective $x = 0$. Ceci montre que $\ker(a) \oplus \ker(b)$.
   Soit $x \in E$; on a $x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \ker(a) + \ker(b)$ car $a^2 = b^2 = 0$. Ainsi

$$\boxed{E = \ker(a) \oplus \ker(b)}$$

   De plus $\text{Im}(a) \subset \ker(a)$ (car $a^2 = 0$) et $\text{Im}(b) \subset \ker(b)$ (car $b^2 = 0$). $\ker(a) \oplus \ker(b)$ entraîne ainsi $\text{Im}(a) \oplus \text{Im}(b)$.
   Mais on a aussi $\forall x \in E,\ x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \text{Im}(a) + \text{Im}(b)$ et donc $E = \text{Im}(a) + \text{Im}(b)$ et finalement $E = \text{Im}(a) \oplus \text{Im}(b)$.
   Si l'une des inclusions $\text{Im}(a) \subset \ker(a)$ ou $\text{Im}(b) \subset \ker(b)$ était stricte, on aurait $\dim(E) = \dim(\text{Im}(a)) + \dim(\text{Im}(b)) < \dim(\ker(a)) + \dim(\ker(b)) = \dim(E)$ ce qui est une contradiction. Les inclusions sont donc des égalités.

$$\boxed{\text{Im}(a) = \ker(a) \text{ et } \text{Im}(b) = \ker(b)}$$

10. On a $u(\ker(a)) \subset a(\ker(a)) + b(\ker(a)) = b(\ker(a)) \subset \text{Im}(b) = \ker(b)$ et de même $u(\ker(b)) \subset \ker(a)$. Comme $\ker(a)$ et $\ker(b)$ sont supplémentaires,

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

D. Intermède : un principe de décomposition

11. Soit $k \in N$. Si $x \in \ker(v^k)$ alors $v^{k+1}(x) = v(v^k(x)) = v(0) = 0$ et donc $x \in \ker(v^{k+1})$. Ainsi $\ker(v^k) \subset \ker(v^{k+1})$ et

$$\boxed{(\ker(v^k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ croît pour l'inclusion}}$$

12. La suite de terme général $d_k = \dim(\ker(v^k))$ est donc aussi croissante. Or, elle est majorée (par $\dim(E)$). Elle est donc convergente.
Comme elle est constituée d'entiers, elle finit par stationner (puisque pour des indices grands, deux termes consécutifs de la suite sont des entiers distants de moins de 1/2). En notant p le rang à partir duquel la suite stationne, on peut conclure que

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{N}/\ \forall k \geq p,\ \ker(v^k) = \ker(v^p)}$$

Comme les noyaux sont emboîtés, on a $\bigcup_{k\leq p} \ker(v^k) = \ker(v^p)$. L'intersection avec les noyaux suivants ne change alors rien puisque ceux-ci sont égaux à $\ker(v^p)$.

$$\boxed{\ker(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k)}$$

Si p convient, tout entier plus grand que p convient aussi et on peut supposer p pair quitte à le changer en $p+1$.

13. Les noyaux étant emboîtés, $E_\lambda^c(f) = \ker(v^p) \subset \ker(v^{2p})$. Mais $\ker(v^{2p})$ est aussi inclus dans l'intersection des $\ker(v^k)$ pour $k \geq p$ et donc a fortiori dans $\ker(v^p)$. Ainsi,

$$E_\lambda^c(f) = \ker(v^{2p})$$

Soit $x \in E_\lambda^c(f) \cap \mathrm{Im}(v^p)$. Il existe y tel que $x = v^p(y)$ et $v^{2p}(y) = v^p(x) = 0$ montre que $y \in \ker(v^{2p}) = \ker(v^p)$ et donc que $x = v^p(y) = 0$. On a donc $E_\lambda^c(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$.
Par théorème du rang, les sommes des dimensions de $E_\lambda^c(f) = \ker(v^p)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ vaut $\dim(E)$. La somme précédente est donc égale à E et nos espaces sont supplémentaires dans E.
Si $x \in \mathrm{Im}(v^p)$, x s'écrit $x = v^p(y)$ et $v(x) = v^p(v(y)) \in \mathrm{Im}(v^p)$.
Si $x \in \ker(v^p)$ alors $v^p(v(x)) = v(v^p(x)) = v(0) = 0$ et donc $v(x) \in \ker(v^p)$.

$$\boxed{E_\lambda^c(f) \text{ et } \mathrm{Im}(v^p) \text{ sont des supplémentaires de } E \text{ stables par } f.}$$

14. Supposons, par l'absurde, que λ soit valeur propre de $f|_{\mathrm{Im}(v^p)}$. Il existe alors $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$ c'est à dire tel que $x \in \ker(v) \subset E_\lambda^c$. Comme $E_\lambda^c(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont en somme directe, $x = 0$ et ceci est contradictoire.
$(X-\lambda)^p$ annule $f|_{E_\lambda^c(f)}$ (par définition de $E_\lambda^c(f)$). La seule valeur propre possible pour $f|_{E_\lambda^c(f)}$ est donc λ.

$$\boxed{\lambda \notin \mathrm{Sp}(f|_{\mathrm{Im}(v^p)}) \text{ et } \mathrm{Sp}(f|_{E_\lambda^c(f)}) \subset \{\lambda\}}$$

Si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (ce qui revient à dire que λ est valeur propre de f), l'inclusion est une égalité (par exemple car dans un $\mathbb{C}$ espace de dimension ≥ 1 tout endomorphisme a au moins une valeur propre).

15. Les seules valeurs propres possibles de f sont λ et μ. Comme on est dans un $\mathbb{C}$-espace, il existe des entiers q et r tels que

$$\chi_f = (X-\lambda)^q (X-\mu)^r$$

q et r peuvent être nuls si λ ou μ n'est pas valeur propre mais $q + r = \dim(E)$.
Notons $g = f|_{\mathrm{Im}(v^p)}$. Un polynôme annulant f annule g et le théorème de Cayley-Hamilton indique que

$$(g - \lambda Id)^p \circ (g - \mu Id)^r = 0$$

La question précédente indique que $(g - \lambda Id)^p$ est inversible (car λ n'est pas valeur propre de g) et en composant par l'inverse, on a donc

$$(g - \mu Id)^r = 0$$

En particulier, $\forall x \in \mathrm{Im}(v^p)$, $x \in \ker((g - \mu Id)^r) \subset \ker((f - \mu Id)^r) \subset E^c_\mu(f)$.
Avec le résultat de la question 13, on a donc

$$E \subset E^c_\lambda(f) + E^c_\mu(f)$$

Par ailleurs, dans une base adaptée à la décomposition $E = E^c_\lambda(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$, la matrice de f est bloc-diagonale d'après la question 13. De plus, la question 14 indique qu'un bloc n'admet que λ comme valeur propre et l'autre n'admet que μ comme valeur propre. Le polynôme caractéristique du premier bloc est $(X - \lambda)^{\dim(E^c_\lambda(f))}$ et celui du second est $(X - \mu)^{\dim(\mathrm{Im}(v^p))}$. Comme le produit de ces polynômes donne χ_f, on a $\dim(E^c_\lambda(f)) = q$. De même, on a $\dim(E^c_\lambda(f)) = q$.
Ainsi, $E = E^c_\lambda(f) + E^c_\mu(f)$ et les dimensions sont les bonnes (la dimension de E est la somme des dimensions des deux autres espaces). On conclut que

$$\boxed{E = E^c_\lambda(f) \oplus E^c_\mu(f)}$$

E. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

16. $u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$. Ainsi

$$a \circ u^2 = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = u^2 \circ a$$

On procède de même avec $u^2 \circ b$.

$$\boxed{a \circ u^2 = u^2 \circ a \text{ et } b \circ u^2 = u^2 \circ b}$$

17. Comme a commute avec u^2, il commute avec toutes les itérées de u^2 et donc avec u^p puisque p est pair. Ainsi, si $x \in \mathrm{Im}(u^p)$, il existe y tel que $x = u^p(y)$ et $a(x) = a \circ u^p(y) = u^p \circ a(y) \in \mathrm{Im}(u^p)$. $\mathrm{Im}(u^p)$ est donc stable par a et de même il est stable par b.
a_G et b_G sont ainsi des endomorphismes de G et $a_G^2 = (a^2)_G = 0$ (idem pour b).

$$\boxed{a_G^2 = b_G^2 = 0}$$

18. Notons $F = E^c_0(u)$. F et G sont stable par u, et la restriction u_F de u à F est nilpotente (0 est la seule valeur propre avec la question 14) et la restriction u_G de u à F est inversible (0 n'est pas seule valeur propre avec la question 14).
D'après le résultat admis, il existe une décomposition $F = F_1 \oplus F_2$ telle que $u(F_1) \subset F_2$ et $u(F_2) \subset F_1$.
Avec la question précédente, u_G vérifie **(C2)** et comme c'est un automorphisme, la partie C s'applique. Il existe une décomposition $G = G_1 \oplus G_2$ telle que $u(G_1) \subset G_2$ et $u(G_2) \subset G_1$.
En posant $H_1 = F_1 \oplus G_1$ et $H_2 = F_2 \oplus G_2$ (le caractère direct des somme découle de $F \oplus G$), on a alors $E = H_1 \oplus H_2$ (on décompose sur F et G et on décompose chaque composante) et $u(H_1) \subset H_2$, $u(H_2) \subset H_1$. Ainsi

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

F. La condition (C3) implique (C1)

19. Composons l'identité $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ à droite par φ^{-1} et à gauche par φ. On obtient

$$u = -\varphi \circ u \circ \varphi^{-1} = \varphi^2 \circ u \circ \varphi^{-2}$$

On en déduit en composant à droite par φ^2 que

$$\boxed{\varphi^2 \circ u = u \circ \varphi^2}$$

20. Comme on est dans un $\mathbb{C}$-espace, φ^2 possède une valeur propre λ. La question 13 donne $E = E^c_\lambda(\varphi^2) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$ (où $v = \varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E$ et pour un bon entier p). $F = E^c_\lambda(\varphi^2)$ et $G = \mathrm{Im}(v^p)$ sont des supplémentaires de E stables par φ^2.
Soit $x \in F$; on a $\varphi^{2p}(x) = 0$ et comme u commute avec φ^2, $\varphi^{2p}(u(x)) = u(\varphi^{2p}(x)) = 0$. Ainsi, F est stable par u.
Soit $x \in G$; on a l'existence de y tel que $v^p(y) = x$. Comme u et $v = \varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E$ commutent, on a $u(x) = v^p(u(y)) \in G$ et G est stable par u.
On a vu que $\varphi^2 \circ u \circ \varphi^{-2} = u$ et comme F et G sont stables par tous les endomorphismes mis en jeu, cette relation reste vraie pour les endomorphismes induit sur F et G. L'indécomposabilité de u indique que F ou G est nul et comme F ne 'est pas, c'est que G l'est et que $F = E$. Ainsi, φ^2 est annulé par $(X - \lambda)^p$ et ne possède que λ comme valeur propre.
Si μ est valeur propre de φ et x vecteur propre associé alors $\varphi(x) = \alpha x$ et donc $\varphi^2(x) = \alpha^2 = x$ et donc $\alpha^2 = \lambda$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{\alpha, -\alpha\} \text{ avec } \alpha^2 = \lambda \text{ unique valeur propre de } \varphi^2}$$

21. φ admettant au plus deux valeurs propres, on peut lui appliquer la question 15 et obtenir

$$E = E^c_\alpha(\varphi) \oplus E^c_{-\alpha}(\varphi)$$

Notons que l'hypothèse **(C3)** donne $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$ et donc

$$\forall x,\ (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)(u(x)) = -(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)(u(x))$$

puis par récurrence assez simple (en particulier car $\varphi - \alpha \mathrm{I}_E$ et $\varphi + \alpha \mathrm{I}_E$ commutent)

$$\forall x,\ (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^k(u(x)) = (-1)^k(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^k(u(x))$$

Soit $x \in E^c_\alpha(\varphi)$, c'est à dire que $(\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^p(x) = 0$. On a alors $(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^p(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in E^c_{-\alpha}(\varphi)$. Ainsi $u(E^c_\alpha(\varphi)) \subset E^c_{-\alpha}(\varphi)$ et de même $u(E^c_{-\alpha}(\varphi)) \subset E^c_\alpha(\varphi)$. En conclusion,

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

22. On procède par récurrence sur la dimension de l'espace.
    - Initialisation : on suppose que u est un endomorphisme d'un espace de dimension 1 qui vérifie **(C3)**. Comme l'espace est de dimension 1, u est indécomposable et la question précédente montre qu'il est échangeur.
    - Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'au rang n. Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension $n+1$ et qui vérifie **(C3)**.
    Si u est indécomposable, il est échangeur avec ce qui précède.
    Sinon, il existe une décomposition $E = F \oplus G$ avec F et G non nuls stables par u et tels que u_F et u_G vérifient **(C3)**. L'hypothèse de récurrence s'applique à u_F et u_G et permet de décomposer F et G. Comme en question 18, on en déduit une décomposition de E qui montre que u est échangeur.

$$\boxed{\textbf{(C3)} \text{ implique } \textbf{(C1)}}$$

enfin le fait que leur somme fasse 1. Tout ce qui ne permettait pas de déterminer que le candidat avait pensé à tous ces éléments, entraînait perte partielle ou totale de points.
Q 15 : l'idée est souvent là chez ceux qui ont abordé cette question (d'un autre côté, elle était suggérée), mais une rédaction trop imprécise en a pénalisé beaucoup.
Q 16 : un raisonnement classique d'algèbre par double inclusion. On ne pouvait pas appliquer 15 pour p=1 puisque rien ne garantit que les coefficients de A soient tous strictement positifs, ce qui était l'un des points essentiels de la preuve de 15.
Q 17 : seule une poignée de candidats a pensé à utiliser la question 13 pour conclure. Les autres ont perdu du temps et des points.
Les questions suivantes n'ont été que très peu abordées de manière correcte donc nous n'en parlerons pas. Notons toutefois une erreur commune dans la question 19.
Le produit UL est une matrice stochastique de rang 1, de même que P, donc P=UL.

1.2.6.Mathématiques II — PSI

- Remarques générales

Il s'agissait d'établir une caractérisation, due à Wang et Wu (J.-H. Wang, P.Y. Wu, *Sums of square-zero operators*, Studia Math. 99 (1991), 115–127), des endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie pouvant se décomposer en la somme de deux endomorphismes de carré nul. Le contrat était ici rempli modulo le cas des endomorphismes nilpotents, dont on admettait le caractère échangeur : ce dernier résultat fait essentiellement intervenir la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent et était difficilement abordable dans le cadre d'une épreuve de concours. Signalons que l'équivalence entre les conditions (C1) à (C3) de l'énoncé tient sur un corps arbitraire de caractéristique différente de 2, tandis que l'équivalence entre le caractère échangeur et la décomposabilité en somme de deux endomorphismes de carré nul reste vraie sur un corps quelconque (voir J.D. Botha, *Sums of two square-zero matrices over an arbitrary field*, Linear Algebra Appl. 436 (2012), 516–524). La condition (C3) est en revanche toujours vérifiée sur un corps de caractéristique 2. La démonstration présentée ici fait en grande partie intervenir la notion de *sous-espace caractéristique* associé à une valeur propre d'un endomorphisme u, développée dans la partie D.

Le sujet, d'un niveau et d'une longueur conformes aux standards du concours, mobilisait les connaissances du programme d'algèbre linéaire de première et seconde année en filière PSI, y compris la réduction des endomorphismes et les polynômes d'endomorphismes. Le sujet contenait une large majorité de questions de difficulté faible à moyenne. Les questions les plus délicates étaient les 14, 15, 18, 20, 21 et 22 : elles ont permis aux meilleurs candidats de s'exprimer et ont mis quasiment tous les autres en échec. En grande majorité, les candidats ont traité les questions 4 à 12.

Trop de copies sont mal rédigées, mal présentées et mal orthographiées. Des sanctions systématiques ont été appliquées aux copies truffées de symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ utilisés à mauvais escient.

Cette année, le jury n'a pas eu à déplorer de contresens particulier sur les objets introduits dans le préambule. Les candidats ne devaient pas jouer sur les mots et faire comme si la notion d'endomorphismes semblables leur était connue : en particulier il n'était pas acceptable d'annoncer sans explication que deux endomorphismes semblables ont la même trace. Beaucoup de candidats ont, en fin de partie D, confondu le sous-espace caractéristique $E_\lambda^c(f)$ avec le sous-espace propre $E_\lambda(f)$.

Trop de candidats confondent ouvertement endomorphismes et matrices carrées, ce qui était d'autant plus problématique ici que l'on raisonnait sur des espaces vectoriels abstraits dénués de toute base *canonique*. À ce titre, les candidats doivent faire preuve de davantage de précision dans leur rédaction : parler de *la* matrice associée à un endomorphisme, sans indiquer de base, n'est pas acceptable. La précision dans les raisonnements fait aussi trop souvent défaut dès qu'apparaissent des objets formels : ainsi, en 2, très peu de candidats mentionnent (et justifient !) que δ et $-\delta$ sont différents.

Dans l'ensemble, le jury a pu constater, pour une moitié des copies corrigées, une maîtrise à peu près convenable des outils d'algèbre linéaire de première année (typiquement, la question 9 est partiellement réussie par une bonne proportion de candidats). En revanche, les outils de seconde année ne semblent souvent pas faire partie de l'arsenal des candidats. Le théorème de Cayley-Hamilton est trop peu souvent utilisé pour résoudre efficacement la question 2 ; la stabilisation d'un noyau ou d'une image par commutation n'est un réflexe que chez une infime fraction des candidats (voir les questions 13 et 17, où l'application de ce principe général échappe à presque tous) ; enfin, l'utilisation d'un polynôme annulateur pour discuter un spectre (question 14) est une idée qui ne vient spontanément qu'à une vingtaine de candidats parmi les 5000 ayant passé l'épreuve. Le sujet était conçu pour qu'une utilisation judicieuse des outils de seconde année permette d'avancer rapidement, mais peu sont ceux qui ont su en tirer profit, les autres se rabattant systématiquement sur des techniques rudimentaires et lourdes.

- Détail des questions

– La trace est effectivement invariante par similitude, mais dans le cas des endomorphismes on attendait une explication : en effet, la notion d'endomorphismes semblables est normalement inconnue des étudiants, et il est hors de question d'admettre quelque résultat que ce soit sur elle, plus particulièrement dès la première question du sujet. Les candidats pouvaient utiliser l'identité, $\forall (u,v) \in \mathrm{L}(E)^2, tr(u\circ v) = tr(v \circ u)$ mais pas $\forall (u,v,w) \in \mathrm{L}(E)^3, tr(u\circ v\circ w) = tr(v\circ u\circ w)$ puisque cette dernière est fausse !

– Les candidats pouvaient utiliser la formule $\chi_u = X^2 - tru\,X + \det u$ pour obtenir l'essentiel des résultats de cette question. Le jury a lu énormément de raisonnements faux : un endomorphisme d'un plan vectoriel n'a pas nécessairement deux valeurs propres distinctes, un polynôme annulateur de degré 2 n'est pas nécessairement le polynôme caractéristique, etc. Le fait qu' $\delta \neq -\delta$ était crucial pour déterminer la dimension des sous-espaces propres de u : il fallait le mentionner et le justifier. On a vu souvent apparaître l'écriture $\sqrt{\det(u)}$, qui n'avait pas ici de sens.

– Beaucoup de candidats signalent leur incompréhension de la notion de droite propre en proposant comme sous-espaces échangés $E_\delta(u)$ et $E_{-\delta}(u)$. D'autres ont la bonne idée, à savoir considérer $D = Vect(x+y)$ où x et y sont des vecteurs propres associés respectivement à δ et $-\delta$. Attention de ne pas se limiter à des vecteurs respectifs de $E_\delta(u)$ et $E_{-\delta}(u)$, qui pourraient être nuls. Pour ceux qui trouvent une droite correcte, il est trop rare de lire des démonstrations totalement justifiées des propriétés attendues de D.

– Question facile le plus souvent réussie : revenir aux coefficients n'était pas une bonne idée pour justifier la réponse, le calcul par blocs était plus judicieux.

– Pour l'inversibilité de D et le calcul de D^{-1}, tout argument incorrect était sanctionné. Le calcul de D^2 suffisait à conclure. L'usage d'une comatrice (hors programme !) pour calculer D^{-1} n'était pas judicieux. On attendait plusieurs étapes de calcul pour DMD^{-1}.

– On attendait une justification minimale. À ce titre, non seulement $u(F) \subset G$ n'implique pas $u(F) \not\subset F$ (que penser du vecteur nul ?), mais ce dernier fait ne donnait pas aux candidats les informations qu'ils prétendaient tirer sur la forme de la matrice.

- On attendait non seulement une référence aux questions 5 et 6, mais aussi une rédaction impeccable sur le retour aux endomorphismes. Le cas où l'un des espaces est nul est rarement bien traité : dans celui-ci les données introduites à la question 6 étaient caduques ; il est vrai que u est alors nul, mais on ne peut se contenter de l'affirmer. Signalons que, géométriquement, on pouvait prendre pour a (respectivement, pour b) l'endomorphisme nul sur G (respectivement, sur F) et dont la restriction à F (respectivement, à G) coïncide avec u ; on pouvait aussi prendre pour φ la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.
- Question classique souvent bien traitée.
- Il y avait de nombreuses façons de procéder et on pouvait même raisonner sans la moindre référence à la dimension finie. Notons que les égalités $Ker a = \mathrm{Im} a$ et $Ker b = \mathrm{Im} b$ ne servaient pas réellement dans la suite (seule l'inclusion facile était utilisée), mais leur démonstration a permis de mettre en valeur les candidats ayant de la suite dans les idées.
- Question souvent bien réussie. Attention, pour un sous-espace vectoriel F de E, l'égalité $(a+b)(F) = a(F)+b(F)$ ne tient pas en général.
- À quoi bon raisonner par récurrence ? Le passage de $v^k(x)=0$ à $v^{k+1}(x)=0$ devait être justifié. Plusieurs candidats confondent $(f-\lambda \mathrm{id})^2$ et $f^2-\lambda^2\mathrm{id}$.
- Le fait que la suite des dimensions $(\dim Ker v^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est stationnaire est rarement bien justifié. Il est vrai que toute suite d'entiers croissante et majorée est stationnaire, mais on voit mal dans quel paragraphe du programme ce résultat est censé figurer.
- Cette question fait souvent la distinction entre les bonnes copies et les autres. Le théorème du rang ne suffit pas à justifier l'égalité $E = Ker v^p \oplus Im v^p$. Partir d'un élément de $Ker v^p$ et l'écrire comme un élément de $Ker v^{2p}$ n'était pas de nature à faire progresser vers une solution. Pour les stabilités exigées en fin de question, le recours à une commutation aurait été judicieux (le fait qu'un polynôme en f commute nécessairement avec f pouvait être considéré comme un résultat de cours).
- La première partie de la question est parfois bien réussie. On aurait aimé avoir des explications sur l'inclusion $Ker v \subset Ker v^p$, car elle ne pouvait pas directement se déduire de la question 11 dans le cas $p=0$. La deuxième partie de la question est rarement bien traitée. Une fois démontré qu' λ est la seule valeur propre possible de $f_{|E_\lambda^c(f)}$, on pouvait conclure rapidement en notant que cet endomorphisme a au moins une valeur propre puisque $E_\lambda^c(f)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Ici, trop peu de candidats pensent à utiliser un polynôme annulateur de $f_{|E_\lambda^c(f)}$.
- Cette question difficile a été très peu réussie.
- Ici a et b n'avaient aucune raison de commuter, et il fallait donc développer u^2 en $a^2+ab+ba+b^2$. Il était judicieux de commencer par simplifier l'expression d' u^2 avant de calculer $u^2 a$ et au^2.
- C'est souvent bien compris, mais un appel à un théorème du cours aurait permis de proposer des solutions plus efficaces que celles que le jury a le plus souvent vues.

- Cette question n'est traitée qu'épisodiquement. Très peu de candidats identifient correctement u_F comme un endomorphisme nilpotent et u_G comme un automorphisme. La difficulté était ensuite de voir comment, à partir du caractère échangeur de ces endomorphismes, obtenir celui de u.
- Question souvent traitée et assez péniblement rédigée. Les calculs sont rarement présentés de manière intelligible.
- Ces questions n'ont qu'épisodiquement été traitées correctement, les quelques tentatives de grappillage ont souvent été vaines. Traiter la deuxième partie de la question 21 ne rapportait rien si la première n'était pas réussie.

- Terminons par quelques conseils pour les futurs candidats.
- Maîtriser parfaitement son cours.
- Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.
- Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. On pouvait ici avoir une note tout à fait satisfaisante en se contentant de traiter correctement les deux tiers des questions.

2. PHYSIQUE

2.1. Épreuves orales - Remarques générales

- Déroulement de l'épreuve orale

L'oral de physique dure environ une heure et comporte en général deux parties qui peuvent être préparées ou abordées en direct au tableau. L'interrogation peut comporter une question de cours ou uniquement des exercices.
Un même examinateur interroge tous les candidats selon la même procédure. Les modalités de l'interrogation sont annoncées en général à l'extérieur de la salle et rappelées si besoin au début de l'épreuve. L'oral du concours Mines-Ponts classe les candidats au sein de chaque jury. Si la procédure est parfois un peu différente d'un examinateur à l'autre, tous les examinateurs ont les mêmes exigences.

Quels qu'en soient le contenu ou le déroulement, l'épreuve est avant tout **un échange oral entre l'examinateur et le candidat**. L'examinateur peut donc interrompre l'exposé du candidat à tout moment pour demander des précisions, élargir le sujet, canaliser l'exposé, ou aider la progression.
Le candidat n'a pas à s'inquiéter de ces interventions. Elles font partie de l'interrogation et ne préjugent nullement de la valeur de sa prestation.

L'examinateur doit rester neutre et suivre les propositions du candidat. Cette neutralité, qui peut conférer une attitude parfois un peu distante, n'est jamais malveillante.
De façon générale, les examinateurs ont pour tâche d'aider le candidat à révéler le meilleur de lui-même.