Équations différentielles linéaires

1 Calculs sur des équations scalaires

Exercice 1 – *Des équations scalaires d'ordre* 1
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 4y = t^2 \mathrm{e}^{-4t}$;
2. $y' + y = \mathrm{e}^t \cos t$;
3. $y' - 2ty = 1 - 2t^2$.

Exercice 2 – *Des équations scalaires d'ordre* 2
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = 3t\mathrm{e}^{3t}$;
2. $y'' + y = 4t^2 \mathrm{e}^t$;
3. $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-t} \cos t$;

Exercice 3 – *CCP 2017 [7/10]*
Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \qquad \frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}.$$

En déduire la résolution de

$$t(t^2-1)x' + 2x = t^2$$

« sur des intervalles de $\mathbb{R}$ ».

Exercice 4 – *Mines-télécom 2017 [6/10]*
Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathrm{sh} x)y' + \mathrm{e}^x y = 1$$

Exercice 5 – *Centrale 2017 [6/10]*
Exercice reconstitué, l'énoncé tel que je l'ai reçu étant tout pourri ; merci Romain...
On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y' - 2xy = 1 \tag{E}$$

1. (a) Trouver les solutions développables en série entière.
   (b) Par ailleurs, déterminer les solutions sous une forme intégrale.
2. On s'intéresse maintenant au problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et de la condition initiale $y(0) = 0$.
   (a) Montrer que ce problème de Cauchy possède une unique solution.
   (b) Montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \frac{4^p p!}{(2p+1)!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(p-k)!}.$$

Exercice 6 – *Centrale 2017 [6/10]*
On s'intéresse à l'équation différentielle

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{E}$$

sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
2. On pose $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} f(x)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une autre équation différentielle.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 7 – *Deux changements de variable [5/10]*

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$:
$$t^2y'' + ty' - 9y = 6t^3.$$
« On pourra poser $t = \mathrm{e}^u$ », ce qui, BIEN ENTENDU, ne signifie pas qu'on va faire n'importe quoi, mais par exemple : on va considérer la fonction COMPOSÉE $z : u \mapsto y(\mathrm{e}^u)$.
2. En posant $z(x) = y(\sqrt{x})$, résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$: $ty'' - y' - t^3y = 0$.

Exercice 8 – *Un changement de fonction [4/10]*
En considérant $z : x \mapsto x^2y(x)$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

Exercice 9 – *CCP 2014 [6/10]*
On considère l'équation différentielle :

$$xy' + 2y = \frac{1}{1+x}\cdot \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.
2. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$; parmi les solutions trouvées, déterminer celles possédant une limite finie en 0.

Exercice 10 – *CCP 2016 [6/10]*
Résoudre l'équation différentielle $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$.
Y a-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

2 Résultats qualitatifs ; exercices plus théoriques

Exercice 11 – *Un développement asymptotique [7/10]*

1. Donner une expression explicite (avec une intégrale) de la solution de $y' - \mathrm{e}^{-x}y = 1$ vérifiant $y(0) = 0$.
2. Calculer un développement asymptotique à deux termes de $y(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 12 – *Un grand classique taupinal [8/10]*
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $y'(t) + y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer : $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Indication : *On pourra poser $g = y' + y$ et constater alors qu'on a $y' + y = g$ (!) puis résoudre par variation de la constante.*

Exercice 13 – *Lemme de Gronwall [6/10]*
Soit $I = [t_0, t_0 + T]$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Soient $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^+)$ telles qu'il existe $C \geqslant 0$ telle que pour tout $t \in I$, $u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} uv$. Montrer :

$$\forall t \in I, \qquad u(t) \leqslant C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v\right).$$

On pourra dériver $w : t \mapsto C + \int_{t_0}^{t} uv$.

Exercice 14 – *IMT 2017 [6/10]*
On cherche les $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(1 - x)$.

1. Montrer qu'une éventuelle solution est deux fois dérivable.
2. Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par une éventuelle solution.
3. Déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice 15 – *Mines 2017 [6/10]*
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)\, dt$.

1. Montrer que J est solution de l'équation différentielle :
$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{E}$$
2. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$: $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt$.

Exercice 16 – *Centrale 2015 [7/10]*
On définit, pour $f \in E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$:

$$L(f) : x \in [0, 1] \longmapsto \int_0^1 \mathrm{Inf}(x, t) f(t) dt$$

1. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres de L.

3 Quelques systèmes différentiels

Exercice 17 – *En dimension* 2 *[3/10]*
Résoudre :

$$\begin{cases} x' = & 5x - 2y \\ y' = & -x + 6y \end{cases}$$

Exercice 18 – *TPE 2009 [5/10]*
Résoudre $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 19 – *CCP 2017 [5/10]*
On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

1. Prouver que A est diagonalisable, et expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
2. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -x + 3y - 2z \\ y' = -3x + 5y - 2z \\ z' = -3x + 4y - z \end{cases}$$

Exercice 20 – *Télécom Sud Paris 2015 [4/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$

Exercice 21 – *Une trigonalisation [7/10]*
Résoudre :

$$\begin{cases} x' = & & & 2y & + & 2z \\ y' = & -x & + & 2y & + & 2z \\ z' = & -x & + & y & + & 3z \end{cases}$$

4 Des indications

Exercice 1 – $\left(t^3/3 + K\right) \mathrm{e}^{-4t}$; $K\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\mathrm{e}^t}{5}(\sin t + 2\cos t)$; $t + K\mathrm{e}^{t^2}$.

Exercice 2 – $K_1\mathrm{e}^t + \left(K_2 - 3t/4 + 3t^2/4\right) \mathrm{e}^{3t}$; $K_1 \cos t + K_2 \sin t + 2(t^2 - 2t + 1)\mathrm{e}^t$; $\left(K_1 \cos t + K_2 \sin t + \frac{t \sin t}{2}\right) \mathrm{e}^{-t}$.

Exercice 3 – Je trouve $(a, b, c) = (-1, 1/2, 1/2)$. Il s'agit donc de recoller en 0 et ± 1 les solutions de la forme $K\dfrac{t^2}{(t-1)(t+1)} + \dfrac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}\cdot$

Exercice 4 – On trouvera comme $W\alpha : x \mapsto \dfrac{K + 2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1}\cdot$ On aura à un moment fait le calcul :

$$y' = \frac{-2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} y = -\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1} y = \left(-\ln\left|\mathrm{e}^{2x} - 1\right|\right)' y...$$

Mais attention : il reste à recoller !

Exercice 5 – On obtient la relation de récurrence $a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$, ce qui ramène les termes d'indices pairs à $a_0 = y(0)$ et ceux d'indices impairs à $a_1 = 1$. Avec la condition initiale, $a_0 = 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

et il reste à voir le membre de droite comme un produit de Cauchy de deux séries entières puis d'invoquer l'unicité du développement en série entière.

Exercice 6 – En écrivant $f(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, on a f solution de (E) si et seulement si $g'' = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\cdot$ Ceci nous donne g à une fonction affine près, ce qui est raisonnable puisque les solutions de l'équation homogène sont justement les $x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^x$.

Exercice 7 – Les changements de variable conduisent aux équations $z''(u) - 9z(u) = 0$ et $4z''(x) - z(x) = 0$; on trouve finalement : $t \mapsto K_1 t^3 + \dfrac{K_2}{t^3} + t^3 \ln t$ et $t \mapsto K_1 \mathrm{e}^{t^2/2} + K_2 \mathrm{e}^{-t^2/2}$. Bonus : résoudre les équations sur $\mathbb{R}$!

Exercice 8 – Le changement de fonction proposé conduit à $z'' - z = 1$, puis $y(x) = \dfrac{K_1 \mathrm{e}^x + K_2 \mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2}\cdot$ Bonus : résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 – Pour que $x \mapsto \dfrac{K + x - \ln(1+x)}{x^2}$ soit développable en série entière au voisinage de 0, il faut certainement que $K = 0$... et c'est suffisant.

Exercice 10 – Il s'agit de résoudre d'abord l'équation sur les 4 intervalles sur lesquels elle est « résolue ». Sur ces intervalles, les solutions sont les applications $t \mapsto (K - \ln|t|)\,\dfrac{t^2}{1-t^2}\cdot$ Amusez-vous pour recoller ! À première vue, je dirais qu'on peut recoller avec deux degrés de liberté en 0 alors qu'en 1 (mais aussi en -1) l'existence d'une limite finie imposera de prendre des constantes nulles... et que réciproquement ces constantes fournissent une solution $\mathcal{C}^1$. Finalement, on trouve exactement une solution définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 – On trouvera

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} \int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}} dt$$

puis $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} = 1 - \mathrm{e}^{-x} + o(\mathrm{e}^{-x})$ et

$$\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}} dt = x + \int_0^x \underbrace{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}} - 1\right)}_{\sim \mathrm{e}^{-t}} dt = x + \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}} - 1\right) dt + o(1)$$

et enfin (puisque $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} = 1 + o(1/x)$) : $y(x) = x + \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}} - 1\right) dt + o(1)$

Exercice 12 – En suivant l'indication : $y(x) = K\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t g(t) dt$. On sort alors les ε à la Cesàro, ou bien on effectue le changement de variable $u = x - t$, on étend en une intégrale sur $[0, +\infty[$, et on conclut par convergence dominée.
Pour exploiter une information concernant les dérivées de y, la méthode précédente sera souvent efficace, généralement associée à une cesàrerie ou une convergence dominée.

Exercice 13 – On a $w' \leqslant vw$, donc $(w\mathrm{e}^{-V})' \leqslant 0$ (avec V ce qu'on pense), donc $w(t)\mathrm{e}^{-V(t)} \leqslant w(t_0)\mathrm{e}^{-V(t_0)}$, etc...

Exercice 14 – L'analyse nous donne $f'' = -f$ puis $f(x) = A\cos x + B\sin x$. Synthèse : une droite de solution. C'est accessoirement plutôt mieux si on exprime nos solutions sous la forme $x \mapsto K\cos(x - \varphi)$...

Exercice 15 – Deux dérivations sous le signe intégrale, une intégration par parties (le terme intégré disparaît). On évoquera l'unicité du développement en série entière, après avoir établi (avec un peu de travail, mais dans vos cordes) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{W_n}{(2n)!} x^{2n} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2} x^{2n}.$$

Exercice 16 – $L(f)(x) = \int_0^x tf(t)dt - x\int_1^x f(t)dt$. On fait alors une analyse (pour laquelle on dérive deux fois), et ensuite... devinez !

Exercice 17 – Valeurs propres 4 et 7 associées aux vecteurs propres $(2,1)$ et $(-1,1)$. Finalement : $(2K_1\mathrm{e}^{4t} - K_2\mathrm{e}^{7t}, K_1\mathrm{e}^{4t} + K_2\mathrm{e}^{7t})$.

Exercice 18 – Valeurs propres -1, 0 et 3 associées aux vecteurs propres $(1,0,1)$, $(4,1,3)$ et $(1,4,3)$...

Exercice 19 – L'aurais tendance à faire confiance à $W\alpha$, pour la diagonalisation comme pour le reste...

Exercice 20 – La matrice est symétrique réelle... Si on veut maintenir son cerveau débranché, on calculera χ_A...

Exercice 21 – La matrice n'est pas diagonalisable, mais est tout de même trigonalisable. Tout d'abord, on dispose des valeurs propres 1 et 2 (double) associées aux vecteurs propres $(2,0,1)$ et $(2,1,1)$. On complète facilement en s'intéressant au noyau de $(A-2I)^2$ qui est un hyperplan contenant (outre quelqu'un de déjà rencontré) le vecteur $(1,0,0)$, ce qui permet de trigonaliser facilement. Finalement, on trouve comme solutions :

$$t \mapsto \left(K_1\mathrm{e}^t + K_2\mathrm{e}^{2t} + K_3te^{2t}, (-4K_2 + 2K_3t + K_3)\,\mathrm{e}^{2t}/4, K_1\mathrm{e}^t + (-4K_2 + 2K_3t + K_3)\,\mathrm{e}^{2t}/4\right)$$