Espaces vectoriels normés (de dim. finie)

« Toujours préférer l'hypothèse de la connerie à celle du complot. La connerie est courante. Le complot exige un esprit rare. » – M. Rocard

Attention : le plus important, dans ce chapitre, ce sont les *dessins* et les *exemples*. Ne figurent ici que l'accessoire : les définitions et résultats du cours ! $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (prononcer « valeur absolue » ou « module » selon le contexte...).

1 Topologie ; normes et boules

Définition 1 — *Normes, distances ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Une **norme** sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :
  - pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;
  - pour tout $x \in E$, $N(x) = 0$ implique $x = 0$ (pitié, pas d'équivalence !) ;
  - pour tous $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.
- Muni d'une norme, on dit que E est un **espace vectoriel normé**.
- Une distance est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que :
  - pour tous $x, y \in E$, on a $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
  - pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$;
  - pour tous $x, y, z \in E$, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Si N est une norme, alors $(x,y) \mapsto N(x-y)$ constitue une distance sur E.

Exemples :
- Dans $\mathbb{K}^n$, on a les normes usuelles $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ (pour $p \geqslant 1$) et $\|x\|_\infty = \operatorname*{Max}\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on utilisera souvent $\|A\|_\infty = \operatorname*{Max}\limits_{i,j} |a_{i,j}|$ et $\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$.
- Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ on dispose des norme $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$ (dont $\|\ \|_2$ qui est euclidienne) et $\|\ \|_\infty$.
- Dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$ on a les variations autour de $\|f\| = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'|$...

Définition 2 — *Convexes, bornés, boules, sphères*

Soit (E,N) un espace vectoriel normé.
- Si $x_0 \in E$ et $r > 0$, la **boule ouverte** (respectivement **boule fermée** et **sphère**) de centre x_0 et rayon r est l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x - x_0) < r$ (respectivement $N(x-x_0) \leqslant r$ et $N(x-x_0) = r$).
- Une partie X de E est dite **convexe** lorsque pour tous $x, y \in X$ on a $[x,y] \subset X$:
$$\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0,1], \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in X$$
  ou encore :
$$\forall x, y \in X,\ \forall t \in [0,1], \qquad x + t(y-x) \in X.$$
- Une partie X de E est dite **bornée** lorsqu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $N(x) \leqslant R$.

Définition 3 — *Ouverts, fermés*

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On considère X une partie de E.

- X est un **ouvert** lorsque :

$$\forall x \in X,\ \exists \rho > 0; \qquad B(x_0, \rho) \subset X$$

En tout point de X, il y a du rabe pour rester dans X, ou encore : tout point de X est « intérieur ».

- X est un **fermé** lorsque $E \setminus X$ est ouvert :

$$\forall x \in E \setminus X,\ \exists \rho > 0; \qquad B(x_0, \rho) \cap X = \emptyset$$

- Attention : dans $E = \mathbb{R}$, $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé !
- Une réunion d'ouverts est un ouvert. Pour l'intersection, ça ne marche que dans le cas fini. On a des résultats de même nature pour les fermés...
- Bonne nouvelle : les boules ouvertes... sont des ouverts ! (Même chose pour les boules fermées)

Définition 4 — *Intérieur et adhérence*

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On considère X une partie de E.

- x_0 est un point intérieur à X lorsqu'il existe $\rho > 0$ tel que $B(x_0, \rho) \subset X$.
- L'intérieur de X, noté $\overset{\circ}{X}$, est l'ensemble des points intérieurs à X ; on a donc $\overset{\circ}{X} \subset X$.
  X est ouvert si et seulement si $X = \overset{\circ}{X}$.
- $x_0 \in E$ est adhérent à X lorsque pour tout $\rho > 0$, $B(x_0, \rho) \cap X \neq \emptyset$.
- L'adhérence de X, noté $\overline{X}$, est l'ensemble des points adhérents à X ; on a donc $X \subset \overline{X}$.
  X est fermé si et seulement si $X = \overline{X}$. Le point de vue séquentiel (deuxième partie de ce poly) va rendre la notion plus concrète.
- La **frontière** de X est égale à son adhérence privée de son intérieur ; *c'est aussi l'intersection de son adhérence et de l'adhérence de son complémentaire.*

Attention, dans $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on dispose des normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$. On a un contrôle dans un sens $\|f\|_1 \leqslant (b - a) \|f\|_\infty$, mais il n'existe pas de contrôle semblable dans l'autre sens (prendre des chapeaux pointus pour lesquels $\|f\|_\infty$ peut être grande mais $\|f\|_1$ reste petite). Cela peut induire des tas de conséquences fâcheuses (convergence pour une norme mais pas l'autre...).

Théorème 1 — *Cas de la dimension finie (qui est le cadre du programme)*

En dimension finie, toutes les normes sont *équivalentes* (si N_1 et N_2 sont deux normes, on a des contrôles mutuels $N_1 \leqslant K_1 N_2$ et $N_2 \leqslant K_2 N_1$, avec $K_1, K_2 > 0$) ; corollairement, en dimension finie les notions d'ouvert, fermé, intérieur et adhérence ne dépendent pas de la norme choisie.

2 Convergence des suites

Définition 5 — *Suites convergentes*

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **convergente vers** ℓ lorsque $\|u_n - \ell\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 1 — Diverses propriétés

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'un espace vectoriel normé E, et X une partie de E.

- Si une suite est convergente, alors elle est bornée.
- Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$ (**unicité** de la limite).
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\alpha u_n + \beta v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$ (propriété mal-nommée « **linéarité** de la limite »).
- Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même, alors la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Proposition 2 — Point de vue séquentiel pour l'adhérence et le caractère fermé

Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E.

- L'adhérence de X est l'ensemble des limites des suites à valeurs dans X.
- X est fermée si et seulement si X est stable par passage à la limite.

Une partie X de E est dite *dense* lorsque $\overline{X} = E$. Cela revient donc à dire que tout élément de E est limite d'une suite à valeurs dans X. C'est le cas de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$... mais aussi de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou encore de l'espace des applications polynomiales dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (c'est le théorème de Weierstrass).

Théorème 2 — *Cas de la dimension finie*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé **de dimension finie** E et de base $(e_1, ..., e_k)$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha_{n,1}e_1 + \cdots \alpha_{n,k}e_k$$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $(\alpha_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. *Et lorsque c'est le cas, on a bien évidemment :*

$$\lim_n u_n = (\lim_n \alpha_{n,1})e_1 + \cdots + (\lim_n \alpha_{n,k})e_k$$

La convergence des coordonnées dans une base assure donc la convergence des coordonnées dans toute base : on peut donc choisir la plus adaptée au problème. De plus, la convergence de la suite (et la valeur de sa limite) est indépendante de la norme choisie sur E.
Par exemple, dire qu'une suite $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ converge, c'est dire que chacune des np suites $(A_{ij}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

3 Continuité

Lorsque f est une application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, que signifient des propositions telles que : $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 12$; $f(t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 12$; $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 12$; f est continue en 1 ; f est continue ?

Définition 6 — *Limite en un point adhérent*

Soit $f : A \subset E \to F$ (E et F sont deux espaces vectoriels normés). On suppose que $x_0 \in \overline{A}$. On dit que f tend vers ℓ en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0;\ \forall x \in E, \qquad x \in A \cap B(x_0, \rho) \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

Proposition 3 — Diverses propriétés standards

- Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$ alors $\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$.
- Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$ alors f est bornée au voisinage de x_0.
- $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. (*caractérisation séquentielle de la limite* ; il y a bien deux résultats distincts à comprendre !)
- Si $f : A \subset E \to F$, $g : F \to G$, $x_0 \in \overline{A}$, $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ et $g(y) \underset{y\to \ell}{\longrightarrow} L$, alors $g\left(f(x)\right) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} L$.
- Si $f, g : A \to \mathbb{R}$, $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$ alors $f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.

Définition 7 — *Continuité*

Soit $f : A \to F$, avec $A \subset E$, E et F étant deux espaces vectoriels normés.

- f est dite **continue en** $a \in A$ lorsque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- f est dite **continue sur** A lorsque f est continue en tout point de A.

Exemples :

— Une norme $\| \ \|$ est continue de E dans $\mathbb{R}$ (ça fait un peu mal à la tête de comprendre ce que ça signifie, mais c'est finalement facile à prouver dès qu'on a écrit mécaniquement ce que ça signifie).

— L'application $(x, y) \mapsto e^{x \cos y} - y \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4 — Continuité : propriétés standards

Les différents espaces de départ et d'arrivée sont normés.

— Une **combinaison linéaire** de fonctions continues (en un point, ou globalement) est continue.

— Une **composée** de fonctions continues est continue.

— Toute fonction **lipschitzienne** ($\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant K \|x - y\|_E$) est continue.

— Si $f : E \to F$ est continue et Y est un fermé (respectivement ouvert) de F, alors

$$f^{<-1>}(Y) = \{x \in E;\ f(x) \in Y\}$$

est un fermé (respectivement ouvert) de E.

Cas particuliers importants : $F = \mathbb{R}$, et $Y = [0, +\infty[$, $Y = \{0\}$ ou $Y =]0, +\infty[$.

Par exemple, $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R};\ \det(M) \in \mathbb{R}^*\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 3 — *Cas de la dimension finie*

Si $g : A \subset E \to F$ avec E et F deux espaces vectoriels normés **de dimension finie**, $(f_1, ..., f_n)$ est une base de F et :

$$\forall x \in A, \qquad g(x) = g_1(x) f_1 + \cdots g_n(x) f_n$$

alors $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha_1 f_1 + \cdots \alpha_n f_n$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $g_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha_k$.

De plus, l'existence de ces limites (mais aussi leurs valeurs) ne dépend ni de la norme choisie dans F ni celle choisie dans E.

La continuité de g (en un point, ou globalement sur A) est donc équivalente à la continuité des applications coordonnées g_k.

Proposition 5 — Des applications continues en dimension finie

Voici quelques briques permettant de montrer que la plupart des fonctions rencontrées sont continues :

— Toute application **linéaire** entre deux espaces de dimension finie est lipschitzienne donc continue. *C'est le cas des applications coordonnées* $\delta_k : x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \longmapsto x_k$

— Toute application **multilinéaire** de E^n dans $\mathbb{K}$ est continue. *(C'est le cas du déterminant vu comme application de* $(\mathbb{K}^n)^n$ *dans* $\mathbb{K}$ *puis comme application de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$*). C'est aussi le cas de* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \mapsto AB$.

— Toute application **polynomiale** sur $\mathbb{R}^n$ est continue.

— Si $f, g : E \to F$ sont continues avec F **euclidien**, alors $x \mapsto \langle f(x) | g(x) \rangle$ est continue.

Théorème 4 — *Fonctions continues sur un « compact » – dimension finie*

Si $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ est continue, avec A fermée et bornée, et E **de dimension finie**, alors f est bornée et atteint ses bornes. *Bref : possède un maximum et un minimum !*

Définition 8 — *Applications partielles*

Si $f : \mathbb{R}^2 \to F$, les **applications partielles** de f sont les applications $f_{x_1} : y \mapsto f(x_1, y)$ (à x_1 fixé) et $f^{y_1} : x \mapsto f(x, y_1)$ (à y_1 fixé).

Proposition 6 — Continuité de f vs. ses applications partielles

Si $f : \mathbb{R}^n \to F$ est continue, alors ses applications partielles sont continues. La réciproque est fausse.

4 Digression hors programme : les applications linéaires continues

L'application linéaire

$$f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longmapsto f(0)$$

est-elle continue ?
Tout est question de la norme prise dans l'espace de départ.

La continuité des applications linéaires est sans objet si les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension finie (dans ce cadre elles sont toutes continues). Si ce n'est pas le cas, on a tout de même une bonne compréhension de la continuité, avec différentes approches

Théorème 5 — *Continuité des applications linéaires*

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F. Il y a alors équivalence entre :

1. f est continue ;
2. f est continue en 0 ;
3. f est lipschitzienne ;
4. f est bornée sur la boule unité (ouverte ou fermée).

Lorsque f est continue (dans le cadre de l'énoncé précédent), on note en général $|\!|\!| f |\!|\!|$ la *norme subordonnée* à $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$:

$$|\!|\!| f |\!|\!| = \operatorname*{Sup}_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F$$

C'est un bon exercice que de montrer... que ceci constitue effectivement une norme sur l'espace $\mathcal{L}_C(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F.