

# Espaces vectoriels normés

## 1 Topologie

### 1.1 Des normes

**Exercice 1 – Centrale 2010 [6/10]**

Dans un espace vectoriel normé, caractériser l'inclusion  $B(x_0, r) \subset B(x'_0, r')$  à l'aide de  $x_0, x'_0, r$  et  $r'$ .

**Exercice 2 – Mines 2009 [6/10]**

On note  $E$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  vérifiant  $f(0) = f(1) = 0$ . Pour  $f \in E$ , on définit  $N(f) = \|f''\|_\infty$ .

1. Montrer que  $N$  est une norme.
2. La comparer à  $\| \cdot \|_\infty$ .

**Exercice 3 – Mot-clé : « densité » [8/10]**

Soit  $u$  une suite à valeurs dans  $[0, 1]$ . On définit sur  $E = \mathcal{C}([0, 1])$  :

$$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(u_n)|}{2^n}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que  $N$  soit une norme.
2. Lorsque cette condition est vérifiée, comparer  $\| \cdot \|_\infty$  et  $N$ .

**Exercice 4 – Sur les fonctions lipschitziennes [6/10]**

$E$  est ici l'ensemble des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitziennes. On définit sur  $E$  :

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \text{ et } N_a(f) = |f(a)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$$

1. Vérifier que  $N$  et  $N_a$  sont des normes sur  $E$ .
2. Sont-elles équivalentes ?
3.  $N$  est-elle équivalente à  $\| \cdot \|_\infty$  ?

**Exercice 5 – Hum... histoire de normes équivalentes ? [6/10]**

Soient  $x_0, \dots, x_n$   $n + 1$  réels distincts. Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{i=0}^n |P(x_i)| \geq \alpha \sup_{[0,1]} |P|.$$

**Exercice 6 – Les yeux fermés [4/10]**

Montrer que les parties de  $\mathbb{R}^3$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 3z\} \quad \text{et} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 < y^2 + z^2\}$$

sont respectivement fermées et ouvertes.

## 1.2 Ouverts et fermés ; intérieur et adhérence

**Exercice 7** – Intérieur d'un sous-espace [6/10]

Soit  $F$  un sous-espace strict de  $E$ . Montrer que  $F$  est d'intérieur vide.

**Exercice 8** – Adhérence et intérieur d'un convexe [7/10]

Soient  $E$  un espace vectoriel normé réel et  $C$  une partie convexe de  $E$ .

Montrer que l'adhérence puis (plus difficile) que l'intérieur de  $C$  sont convexes.

**Exercice 9** – Dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  [6/10]

Calculer l'adhérence et l'intérieur dans  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  de :

1. l'ensemble des  $f \in E$  nulles en 0 et en 1 ;
2. l'ensemble des fonctions strictement positives ;
3. l'ensemble des fonctions strictement croissantes.

**Exercice 10** – Ouvert + fermé [5/10]

Soient  $\Omega$  et  $F$  deux parties respectivement ouverte et fermée d'un espace vectoriel normé. Montrer que

$$\Omega + F = \{a + b \mid a \in \Omega \text{ et } b \in F\}$$

est un ouvert.

## 2 Topologie des matrices

**Exercice 11** – Projecteurs et symétries [3/10]

Montrer que dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices de projection (respectivement symétrie) constitue une partie fermée.

**Exercice 12** – Diagonalisables denses [5/10]

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 13** –  $GL_n(\mathbb{R})$  ouvert dense [5/10]

Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert dense de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 14** –  $O_n(\mathbb{R})$  compact [4/10]

Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est fermé et borné.

**Exercice 15** – L'adhérence passe-t-elle par 0 ? [7/10]

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . La matrice nulle est-elle dans l'adhérence de la classe de similitude de  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$  ?

**Exercice 16** – Une frontière [7/10]

Déterminer, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la frontière de  $SL_n(\mathbb{R})$  (les matrices de déterminant 1).

## 3 Continuité

**Exercice 17** – Distance à un ensemble [7/10]

Pour une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  et  $x \in E$ , on définit :  $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .

1. Montrer que  $d_A$  est 1-lipschitzienne (donc continue!).
2. Expliciter un exemple pour lequel  $d_A(x) = 0$  avec  $x \notin A$ .
3. Supposons  $A$  fermée. Montrer :  $d_A(x) = 0$  si et seulement si  $x \in A$ .

4. On suppose que  $d_A(x) = 0$  si et seulement si  $x \in A$ . Montrer que  $A$  est fermée.

**Exercice 18** – *Intersection d'ouverts [8/10]*

Montrer que tout fermé d'un espace vectoriel normé peut être décrit comme intersection dénombrable d'ouverts. Énoncer le résultat dual.

**Exercice 19** – *Des applications linéaires continues ; exercice limite-limite... [9/10]*

$E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  est muni de  $\|\cdot\|_\infty$ .

1. Soit  $\varphi$  définie par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f.$$

Montrer que  $\varphi$  est continue ; calculer sa norme (au sens hors-programme : la borne supérieure des  $\|\varphi(f)\|$ , pour  $f$  de norme 1), et montrer qu'elle n'est pas atteinte.

2. Même question avec  $\psi$  définie par :

$$\forall f \in E, \quad \psi(f) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^n} f(1/n).$$

**Exercice 20** – *Dans  $\mathbb{R}^2$  [7/10]*

Étudier la continuité des applications suivantes de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $f_1 : (x, y) \mapsto \text{Max}(x, y)$  ;
2.  $f_2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^6 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3.  $f_3 : (x, y) \mapsto \sqrt{|x| + |y|}$  ;
4.  $f_4 : (x, y) \mapsto \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$ .

**Exercice 21** – *Sur le simplexe [6/10]*

Montrer que lorsque  $(x, y, z)$  décrit l'ensemble des triplets de réels positifs et de somme égale à 1, le produit  $xy^2z^3$  possède un maximum.

**Exercice 22** – *Sous le graphe [5/10]*

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 23** – *Une surface [6/10]*

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ . Montrer que  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d \text{ et } z = f(x, y)\}$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^3$  d'intérieur vide.

## 4 Des indications

*Exercice 1* – J'imagine qu'on attend (après avoir fait un dessin) :  $\|x_0 - x'_0\| + r \leq r'$ ...

*Exercice 2* – Déjà,  $t \mapsto \sin(n\pi t)$  interdit l'un des deux contrôles. L'autre est assuré par l'inégalité de Taylor-Lagrange (obtenue après la formule de Taylor avec reste intégral... on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis sur  $f'$  en partant d'un point où  $f'$  s'annule via Rolle...) entre 0 et le point de  $[0, 1/2]$  où  $\|f\|_\infty$  est atteinte), fournissant  $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{8}N(f)$ , atteint pour  $x(1-x)$ .

*Exercice 3* – C'est une norme si et seulement si  $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[0, 1]$ . Lorsque c'est le cas, on a  $N(f) \leq 2\|f\|_\infty$ , avec aucune inégalité dans l'autre sens : si  $\varepsilon > 0$ , on peut construire  $f$  telle que  $N(f) \leq \varepsilon$  et  $\|f\|_\infty = 1$  (prendre un pic évitant les premiers  $u_n$ ...).

*Exercice 4* –  $N_a \leq N \leq 2N_a$  et  $\| \cdot \|_\infty \leq N$ , mais (« pics ») pas de contrôle du type  $N \leq K \| \cdot \|_\infty$ .

*Exercice 5* – N’y aurait-il pas deux normes sur un même espace de dimension finie ?

*Exercice 6* – Je ferais bien intervenir deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  dont je prétendrais qu’elles sont continues « d’après les théorèmes usuels », avant de considérer  $f^{-1}([0, +\infty[)$  et  $g^{-1}(]-\infty, 0])$ .

*Exercice 7* – Si  $F$  était d’intérieur non vide, on trouverait par translation une boule centrée en 0 incluse dans  $F$ , puis  $E \subset F$  par dilatation.

*Exercice 8* – Si  $a, b \in \bar{C}$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , il existe  $(a_n), (b_n) \in C^{\mathbb{N}}$  telles que  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$  et  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$ . On a alors  $\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n \in C$  et  $\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda a + (1 - \lambda)b$ . Pour l’intérieur, si  $B(a, \rho_1) \subset C$ ,  $B(b, \rho_2) \subset C$  et  $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ , alors en prenant  $\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$ , on a ce qu’on peut espérer.

*Exercice 9* – Notant  $X_1, X_2$  et  $X_3$  les trois ensembles considérés, on a  $\overline{X_1} = X_1$ ,  $\overset{\circ}{X_1} = \emptyset$ ,  $\overline{X_2}$  est l’ensemble des fonctions à valeurs positives (au sens large),  $\overset{\circ}{X_2} = X_2$ ,  $\overline{X_3}$  est l’ensemble des fonctions croissantes (pour l’inclusion non triviale, considérer  $f_n = f + \frac{1}{n}\text{Id}$ ), et enfin  $\overset{\circ}{X_3} = \emptyset$ .

*Exercice 10* – On fixe  $(a_0, b_0) \in \Omega \times F$ . Il existe  $\rho > 0$  tel que  $B(a_0, \rho) \subset \Omega$ , et on a alors  $B(a_0 + b_0, \rho/2) \subset \Omega + F$  (et on se fiche du caractère fermé de  $F$ ; c’était un piège!).

*Exercice 11* – L’application  $M \mapsto M^2$  est continue...

*Exercice 12* – Trigonaliser et ajouter des petits trucs sur la diagonale...

*Exercice 13* – Ouvert ( $\det^{(-1)}(\mathbb{R}^*)$ ), dense car  $A - \frac{1}{p}I_n \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} A$  et  $\frac{1}{p} \notin \text{Sp}(A)$  à PCR.

*Exercice 14* – Borné pour  $\| \cdot \|_\infty$  par exemple; et continuité de  $M \mapsto {}^tMM$ .

*Exercice 15* – Déjà, il est nécessaire d’avoir  $\alpha = \beta = 0$  (le déterminant de  $P_n^{-1}AP_n - \alpha I_3$  est toujours nul et converge vers  $-\alpha^3$ ...) Si cette condition est vérifiée, on montre sans mal que la matrice donnée

dans l’énoncé est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*Exercice 16* – Déjà,  $SL_n(\mathbb{R})$  est fermé. Ensuite, toute matrice de  $SL_n(\mathbb{R})$  est limite de matrices qui ne sont PAS dans  $SL_n(\mathbb{R})$  (ajouter  $\frac{1}{p}I_n$ ...) donc est dans l’adhérence du complémentaire. Finalement,  $SL_n(\mathbb{R})$  est sa propre adhérence!

*Exercice 17* – Il s’agit de montrer :  $d_F(x) - d_F(y) \leq \|x - y\|$  et  $d_F(y) - d_F(x) \leq \|x - y\|$ ... Pour la première par exemple, je lancerais bien un coup d’inégalité triangulaire entre  $x, y$ , et  $z \in F$  qu’on fixe provisoirement.

*Exercice 18* –  $\Omega_n = \{x \in E; d_F(x) < 1/n\}$  (cf exercice précédent).

*Exercice 19* –  $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ .

*Exercice 20* –  $f_1(x, y) = \frac{|x - y| + x + y}{2}$ ;  $f_2(x, x^2) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1 \neq f_2(0, 0)$ . Sommes, produits, projections et compositions pour  $f_3$  et  $f_4$ .

*Exercice 21* – Keywords : continue, fermée, bornée.

*Exercice 22* – Caractérisation séquentielle de la fermeture.

*Exercice 23* – Caractérisation séquentielle de la fermeture.