

CCS PSI MATHS2 2023

Rémi Crétois

version du 19 mai 2023

I Intégrale de Gauss

Q 1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, par croissances comparées, $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $e^{-t^2} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto e^{-t^2}$

aussi par comparaison. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est bien convergente.

Q 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est continue sur $[0, 1]$ par opérations. Donc la fonction

f est bien définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)(-x)^2}}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt = f(x)$$

donc f est paire.

Enfin, $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = [\arctan(t)]_0^1$, donc $f(0) = \frac{\pi}{4}$.

Q 3. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. On pose $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

— Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(t^2+1)x^2}$;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $[0, 1]$ (voir question précédente) et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$;

— pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \right| \leq 2|x|e^{-x^2}$. Or, la fonction $x \mapsto 2|x|e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R} et tend vers 0 en $\pm\infty$, donc elle est bornée (on peut aussi faire l'étude de fonction pour voir qu'elle est majorée par sa valeur en $1/\sqrt{2}$). Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \right| \leq M$. La fonction $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2 x^2} dt$.

Q 4. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue sur \mathbb{R} , d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g est l'unique primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0. En particulier, g est de classe C^1 .

Q 5. Pour éviter les ennuis, on commence par remarquer que l'égalité est vraie pour $x = 0$ car $f'(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Puis, pour $x \neq 0$, on pose $u = xt$:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \frac{du}{x} = -2e^{-x^2} g(x) = -2g'(x)g(x)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)}$.

Q 6. D'après les questions précédentes, les fonctions f et $x \mapsto \frac{\pi}{4} - g(x)^2$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et ont la même dérivée. Elle sont donc égales à une constante près. Or, $f(0) = \frac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$, donc les deux fonctions coïncident en 0. Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2}$.

Q 7. On applique le théorème de convergence dominée :

— pour tout $t \in [0, 1]$, $h(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$, de même que la fonction nulle ;

— pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $|h(x, t)| \leq 1$ qui est une fonction indépendante de x et intégrable sur $[0, 1]$.

Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 0 dt = 0}$.

Puis, $g(x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$, donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

II Formule de Stirling

Q 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $t^n e^{-t} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par comparaison. Donc $\boxed{I_n}$ est bien définie.

Q 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise une intégration par parties : on pose $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ qui sont deux fonctions de classe C^1 de sorte que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$:

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)] - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

donc $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n}$. Comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, on a par récurrence immédiate,

$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, I_n = n!}$.

Q 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $t = n + \sqrt{ny}$ qui est C^1 bijectif strictement croissant. On a $y = -\sqrt{n} + \frac{t}{\sqrt{n}}$, donc

$$I_n = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n + \sqrt{ny})^n e^{-n - \sqrt{ny}} \sqrt{n} dy = \sqrt{n} n^n e^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{ny}} dy$$

D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{ny}} dy}$.

Q 11. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $N = \lfloor y^2 \rfloor + 1$. Alors pour tout $n \geq N$, $\sqrt{n} \geq \sqrt{y^2} = |y|$, donc $-\sqrt{n} \leq y$. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} = e^{n \ln(1+y/\sqrt{n}) - y\sqrt{n}}$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, $n \ln(1 + y/\sqrt{n}) - y\sqrt{n} = n(y/\sqrt{n} - y^2/2n + o(1/n^2)) - y\sqrt{n} = -y^2/2 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -y^2/2$. Ainsi, (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} et $\boxed{f_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-y^2/2}}$ par continuité de l'exponentielle.

Q 12. La fonction q est continue sur $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$ par opérations. De plus, au voisinage de 0, $q(x) = \frac{x - (x - x^2/2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$. Donc q est prolongeable par continuité en 0 en posant $q(0) = \frac{1}{2}$.

Q 13. Soit $x > -1$. La fonction $u \mapsto 1 + ux$ est continue et ne s'annule pas sur $[0, 1]$, donc l'intégrale est bien définie. De plus, si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du &= \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{ux}{1+ux} du \\ &= \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1+ux-1}{1+ux} du \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1}{1+ux} du \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} [\ln(1+ux)]_0^1 \\ &= \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, $q(0) = \frac{1}{2} = \int_0^1 u du$.

Donc $\forall x > -1, q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$.

Q 14. Soit $-1 < x < y$. Pour tout $u \in [0, 1]$, $-1 < -u < ux < uy$, donc $0 < 1+ux < 1+uy$ et $\frac{u}{1+ux} > \frac{u}{1+uy}$, donc $q(x) > q(y)$ par croissance de l'intégrale. Ainsi, q est décroissante sur $] -1, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_+$.

Si $y = 0$, alors l'inégalité est bien vérifiée.

Si $y > 0$ alors $\frac{\ln(f_n(y))}{y^2} = -q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \leq -q(y)$ car la fonction $-q$ est croissante sur \mathbb{R}_+ et $\frac{y}{\sqrt{n}} \leq y$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}_+, f_n(y) \leq e^{-y^2 q(y)} = e^{-y(1+y)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_-$. Alors, si $y \leq -\sqrt{n}$, $f_n(y) = 0 \leq e^{-y^2/2}$ et si $y > -\sqrt{n}$, alors $f_n(y) > 0$ et $\frac{\ln(f_n(y))}{y^2} = -q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \leq -q(0)$ car $-q$ est croissante sur \mathbb{R}_- . Donc $\ln(f_n(y)) \leq -\frac{y^2}{2}$ et

$\forall y \in \mathbb{R}_-, f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$.

Q 15. Appliquons le théorème de convergence dominée :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R} et intégrable sur \mathbb{R} (questions 8 et 10) ;
- (f_n) converge simplement vers $f : y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ qui est continue sur \mathbb{R} et intégrable sur \mathbb{R} (question 1 et parité) ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_n(y) \leq g(y)$ où $g : y \mapsto \begin{cases} (1+y)e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ e^{-y^2/2} & \text{si } y < 0 \end{cases}$ qui est une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} et intégrable au voisinage de $+\infty$ (question 8) et de $-\infty$ (question 1).

Donc $\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$ par parité.

En effectuant le changement de variable $t = \frac{y}{\sqrt{2}}$, cette limite vaut donc $2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}$

d'après la question 7.

D'après la question 10, on a donc $\frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi}$ et $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Q 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} w_n &= v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1} n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n} (n+1)!}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^n e^{-1} \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n}}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. En particulier, (w_n) est positive à partir d'un certain rang et comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann, la série $\sum w_n$ converge aussi.

Q 17. Comme $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leq \varepsilon$, donc $1 - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \varepsilon$. Ainsi, comme (b_n) est une suite de réels strictement positifs, $\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)b_n$.

Q 18. La série $\sum (1 + \varepsilon)b_n$ converge donc la série $\sum a_n$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

De plus, pour $n \geq n_0$, $\sum_{k=n}^{+\infty} (1 - \varepsilon)b_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} (1 + \varepsilon)b_k$, donc $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} - 1\right| \leq \varepsilon$.

Ainsi, $\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

Q 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[n, n + 1]$, donc pour tout $t \in [n, n + 1]$,

$$\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2}. \text{ Par croissance de l'intégrale, } \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}.$$

Q 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'encadrement précédent, $R_{n+1} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{n} dt \leq R_n$, l'intégrale étant convergente car $2 > 1$.

Donc pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \leq R_n \leq \frac{1}{n-1}$, et par encadrement, $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Q 21. Comme $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$, que la suite $\left(\frac{1}{12n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement positive et $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge et

(w_n) est positive à partir d'un certain rang au moins, on a d'après la question 18, $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} R_n$.

D'après la question 20, $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$.

Q 22. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (v_k) - v_n$. Or $v_k = \ln(u_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\ln(\sqrt{2\pi})$

d'après la question 15. D'après la question 21, $-\ln(\sqrt{2\pi}) - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Enfin, $\frac{1}{u_n} = e^{-v_n} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. En posant $q_n = n \left(\frac{1}{u_n \sqrt{2\pi}} - 1 - \frac{1}{12n}\right)$,

on obtient donc $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right)$.

III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Q 23. Notons $Z_1 = \frac{1}{2}(X_1 + 1)$. Alors $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$, donc

Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(Z_1 = 1) = P(X_1 = 1) = p$.

On pourrait directement calculer $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = n(2p - 1)$ par linéarité et $V(S_n) =$

$\sum_{k=1}^n V(X_k) = 4 \sum_{k=1}^n V(Z_1) = 4npq$ par indépendance.

Faisons apparaître une loi binomiale : on pose $Z_n = \frac{1}{2}(X_n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ suivent des lois de

Bernoulli de paramètre p et sont encore indépendantes. Donc $B_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ suit une loi binomiale de

paramètres n et p . Donc $E(B_n) = np$ et $V(B_n) = npq$.

Or, $B_n = \frac{1}{2}S_n + \frac{n}{2}$, donc $S_n = 2B_n - n$ et $E(S_n) = 2np - n$ et $V(S_n) = 4V(B_n) = 4npq$.

Q 24. On rajoute un paramètre car la pièce n'est pas équilibrée.

```
def retours(n, p):
    s = 0
    compte = 0
    for i in range(n):
        lancer = random.random()
        if lancer > p:
            s = s-1
        else:
            s = s+1
        if s == 0:
            compte = compte + 1
    return compte
```

Q 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que

$$\begin{aligned} (S_{2n} = 0) &= \{\omega \in \Omega : \text{card}\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, X_i(\omega) = 1\} = \text{card}\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, X_i(\omega) = -1\} = n\} \\ &= \bigcup_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(I) = n}} \bigcap_{i \in I} (X_i = 1) \bigcap_{i \in \bar{I}} (X_i = -1) \end{aligned}$$

Par incompatibilité et indépendance :

$$a_n = \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(I) = n}} \prod_{i \in I} P(X_i = 1) \prod_{i \in \bar{I}} P(X_i = -1) = \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(I) = n}} p^n q^n = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

Q 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{2n+2}}{a_n x^{2n}} \right| = \frac{(2n+2)!(n!)^2 pq}{(2n)!(n+1)!^2} x^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} pq x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4pq x^2$$

Donc d'après le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum a_n x^{2n}$ converge pour tout $x \in \left] -\frac{1}{2\sqrt{pq}}, \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right[$

et diverge pour $|x| > \frac{1}{2\sqrt{pq}}$ et $\left[\text{le rayon de convergence est } R = \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right]$.

Q 27. Lorsque $\frac{1}{2\sqrt{pq}} > 1$, c'est-à-dire lorsque $4pq = 4p(1-p) < 1$ ou encore $4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2 > 0$, donc lorsque $p \neq \frac{1}{2}$, on a $R > 1$, donc $A(1)$ a une valeur finie ;

Pour $p = \frac{1}{2}$, on utilise Stirling : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente donc la série $\sum a_n$ diverge par comparaison des séries à termes positifs.

Ainsi, $\left[A(1) \text{ converge ssi } p \neq \frac{1}{2} \right]$.

Q 28. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} x^n$ (développement usuel).

Donc pour tout $x \in]-R, R[$, $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} (4pqx^2)^n$ et $\left[A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} \right]$.

Q 29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k = \bigcap_{i=1}^{2k-1} (S_i \neq 0) \cap (S_{2k} = 0)$ et $R_0 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (S_i \neq 0)$. La famille $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales :

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} P((S_{2n} = 0) \cap R_k). \text{ Or, lorsque } k = 0 \text{ ou } k > n, \text{ on a } P((S_{2n} = 0) \cap R_k) = 0.$$

Donc $a_n = \sum_{k=1}^n P((S_{2n} = 0) \cap R_k)$. Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(S_{2n} = 0) \cap R_k = R_k \cap (S_{2n} - S_{2k} = 0) =$

$R_k \cap \left(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0 \right)$. D'après le lemme des coalitions, R_k et $\left(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0 \right)$ sont indépendants, donc

$P(R_k \cap (\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0)) = P(R_k)P(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0) = b_k P(\sum_{i=1}^{2n-2k} X_i = 0)$ en utilisant la propriété admise dans l'énoncé.

Ainsi, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k}$. Comme $b_0 = 0$, on trouve donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}$.

Q 30. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq b_n \leq a_n$ donc le rayon de convergence de B est supérieur ou égal à R . Donc pour tout $x \in]-R, R[$,

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

par produit de Cauchy et car $\sum_{k=0}^0 b_k a_{0-k} = 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$, $A(x)B(x) = A(x) - 1$.

Q 31. Pour tout $x \in]-R, R[$, $B(x) = \frac{A(x) - 1}{A(x)} = 1 - \frac{1}{A(x)}$ car A ne s'annule pas.

Enfin, d'après la question 28, pour tout $x \in]-R, R[$, $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$.

Q 32. La fonction $p \mapsto \sqrt{1 - 4p(1-p)}$ est définie pour $1 - 4p(1-p) = (2p-1)^2 \geq 0$ c'est-à-dire pour tout réel p .

On remarque que $B(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(R_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k\right)$ car l'union est incompatible.

Donc la série $\sum b_n$ converge pour toute valeur de $p \in [0, 1]$.

Q 33. L'événement $R_0 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (S_i \neq 0) = \ll \text{le point ne revient jamais en } 0 \gg$ a pour complémentaire $\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k$

qui est une union incompatible. Donc, $P(R_0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(R_k) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Lorsque $p \neq \frac{1}{2}$, $1 \in]-R, R[$, donc $P(R_0) = 1 - B(1) = \sqrt{1 - 4pq} = \sqrt{(2p-1)^2} = |2p-1|$, d'où $P(R_0) = |p - q|$.

Prenons $p = \frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \mapsto b_n x^{2n}$ qui est une fonction continue sur $[0, 1]$, positive et majorée par b_n . Comme $\sum b_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$,

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \sqrt{1 - x^2} = 1$. D'où $P(R_0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 0 = |p - q|$.

IV Loi de l'arcsinus

Q 34. Remarquons que le nombre cherché est :

$$N_{n,x} = \text{card} \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n : \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = x \right\}.$$

Si $x \in [-n, n]$, pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, en notant $m = \text{card}\{i \in [1, n] : \varepsilon_i = -1\}$, on a $n - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n - (n - m - m) = 2m$ qui est pair. Donc si $n - x$ est impair, $N_{n,x} = 0$.

De plus, pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \in \llbracket -n, n \rrbracket$, donc $\boxed{\text{si } x \notin \llbracket -n, n \rrbracket, N_{n,x} = 0}$.

Enfin, supposons que $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ et que $n - x$ est pair. Pour choisir un n -uplet d'éléments de $\{-1, 1\}$ dont la somme fait $x \in \mathbb{N}^*$, il faut et il suffit de choisir $x + \frac{n-x}{2} = a$ coordonnées qui valent 1 et toutes les autres (il y en a $\frac{n-x}{2}$) valent -1 . Donc $\boxed{N_{n,x} = \binom{n}{a}}$.

Q 35. Comme dit dans l'énoncé, tous les chemins sont équiprobables de probabilité $\frac{1}{2^n}$, on a compté les chemins qui mènent à $(S_n = x)$ donc

$$\boxed{P(S_n = x) = \binom{n}{a} \frac{1}{2^n} \text{ si } x \in \llbracket -n, n \rrbracket \text{ et } n - x \text{ est pair et } P(S_n = x) = 0 \text{ sinon.}}$$

Q 36. On réutilise la question 23 et la variable B_n qui suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$ et telle que $S_n = 2B_n - n$. En particulier, S_n prend des valeurs $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ telles que $n + x$ est pair (ou de façon équivalente $n - x$ est pair). Pour un tel x , $\boxed{P(S_n = x) = P(B_n = a) = \binom{n}{a} \frac{1}{2^n}$, où $a = \frac{n+x}{2}$.

Q 37. On a une bijection entre les chemins du premier et deuxième type : à chaque chemin reliant $(0, x)$ à (n, y) passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, on associe le chemin obtenu à partir de celui-ci en prenant la réflexion par rapport à l'axe des abscisses de la portion joignant $(0, x)$ au premier point d'ordonnée 0. Réciproquement, un chemin de $(0, -x)$ à (n, y) passe forcément par au moins un point d'ordonnée 0 (car $x, y \in \mathbb{N}^*$) et on réalise la même réflexion.

Q 38. En effectuant la translation de vecteur $(-1, -1)$, le nombre total de chemins joignant $(1, 1)$ à (n, x) est égal à $N_{n-1, x-1}$. D'autre part, en effectuant la translation de vecteur $(-1, 0)$, le nombre de chemins joignant $(1, 1)$ à (n, x) en passant au moins une fois par l'axe des abscisses est égal au nombre de chemins de $(0, 1)$ à $(n-1, x)$ passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0 et donc d'après la question précédente, il est égal au nombre de chemins quelconques de $(-1, 0)$ à $(n-1, x)$ qui est égal à $N_{n-1, x+1}$ en faisant la translation de vecteur $(0, 1)$. Donc le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontre l'axe des abscisses vaut $\boxed{N_{n-1, x-1} - N_{n-1, x+1}}$.

Q 39. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)$ correspond aux chemins passant par $(0, 0)$, $(1, 1)$ puis joignant $(2n, 2k)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses. Il y en a $N_{2n-1, 2k-1} - N_{2n-1, 2k+1}$ qui sont tous équiprobables de probabilité $\frac{1}{2^{2n}}$, donc

$$\begin{aligned} P((S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} N_{2n-1, 2k-1} - \frac{1}{2^{2n-1}} N_{2n-1, 2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} (P(S_{2n-1} = 2k-1) - P(S_{2n-1} = 2k+1)) \end{aligned}$$

d'après la question 35.

Q 40. Comme S_{2n} ne prend que des valeurs paires, $(S_{2n} > 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (S_{2n} = 2k)$, les événements étant

impossibles pour $k > n$. Donc

$$\begin{aligned} P((S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} > 0)) &= P\left((S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap \bigcup_{k=1}^{+\infty} (S_{2n} = 2k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} = 2k)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} P(S_{2n-1} = 2k - 1) - P(S_{2n-1} = 2k + 1) \end{aligned}$$

En télescopant et en utilisant que pour $k > n$, $P(S_{2n} = 2k) = 0$, on trouve donc

$$\boxed{P((S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} > 0)) = \frac{1}{2} P(S_{2n} = 0)}$$

En utilisant le principe de réflexion,

$$P((S_1 > 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} > 0) \cap (S_{2n} > 0)) = P((S_1 < 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} < 0) \cap (S_{2n} < 0))$$

donc

$$\boxed{P((S_1 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} \neq 0) \cap (S_{2n} \neq 0)) = P(S_{2n} = 0)}$$

Q 41. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par définition,

$$\begin{aligned} P(T_{2n} = 2k) &= P((S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} \neq 0)) \\ &= P((S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} - S_{2k} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} - S_{2k} \neq 0)) \end{aligned}$$

Or pour tout $j \in \llbracket 1, 2n - 2k \rrbracket$, $S_{2k+j} - S_{2k} = \sum_{i=2k+1}^{2k+j} X_i$, donc $(S_{2k+1} - S_{2k} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} - S_{2k} \neq 0)$

et $(S_{2k} = 0)$ sont indépendants. De plus, d'après l'énoncé (interprété largement) $\sum_{i=2k+1}^{2k+j} X_i$ et S_j ont la même loi, « donc », $P((S_{2k+1} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} \neq 0)) = P((S_1 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-2k} \neq 0))$. Ainsi,

$$\boxed{P(T_{2n} = 2k) = P(S_{2k} = 0) \times P((S_1 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-2k} \neq 0))}$$

Q 42. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La question 35 donne $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)$ et $P(S_{2n-2k} = 0) = \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2n-2k}}$.

La question 40 donne alors :

$$\boxed{P(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2^{2k}}\right) \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2n-2k}} = \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n}}$$

Q 43. On remarque que f est continue sur $[0, 1]$, donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Or pour tout $k \leq \lfloor n\alpha \rfloor \leq n\alpha$, on a $\frac{k}{n} \leq \alpha$, donc $f(k/n) = f(\alpha)$. De même pour $k \geq \lfloor n\beta \rfloor + 1 \geq n\beta$,

on a $\frac{k}{n} \geq \beta$ et $f(k/n) = f(\beta)$.

Ainsi, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor n\alpha \rfloor} f(k/n) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} f(k/n) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\beta \rfloor+1}^n f(k/n) = \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} f(\alpha) + \frac{n - \lfloor n\beta \rfloor}{n} f(\beta) + \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \leq \alpha$, donc $\frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ et de même $\frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$. D'où :

$$\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt - \alpha f(\alpha) - (1 - \beta)f(\beta).$$

Comme f est constante sur $[0, \alpha]$ et sur $[\beta, 1]$, $\int_0^\alpha f(t) dt = \alpha f(\alpha)$ et $\int_\beta^1 f(t) dt = (1 - \beta)f(\beta)$, et

$$\boxed{\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^\beta f(t) dt.}$$

Q 44. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\varepsilon_n = 8n \left(1 - \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \binom{2n}{n} \right)$ et vérifions que $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. En utilisant le raffinement de la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= 8n \left(1 - \frac{\sqrt{n\pi} 2\sqrt{n\pi} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \left(1 + \frac{1}{24n} + \frac{q_{2n}}{2n} \right)}{4^n 2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n} \right)^2} \right) \\ &= 8n \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{24n} + \frac{q_{2n}}{2n}}{\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n} \right)^2} \right) \\ &= 8n \left(1 - \left(1 + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 - 2\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \\ &= 8n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \\ &= 8n \left(\frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= 1 + o(1). \end{aligned}$$

On a donc bien $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Q 45. On utilise la question précédente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{8k} \right) \frac{4^{n-k}}{\sqrt{(n-k)\pi}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{8k} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)} \right) \end{aligned}$$

Soit $1 > \varepsilon > 0$. Comme $\frac{\varepsilon_n}{8n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, prenons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $0 < 1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{\varepsilon_n}{8n} \leq 1 + \varepsilon$.

Comme $\lfloor n\alpha \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $n - \lfloor n\beta \rfloor \geq n(1 - \beta) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $\min(\lfloor n\alpha \rfloor, n - \lfloor n\beta \rfloor) \geq N$. Alors pour tout $n \geq N'$, et tout $k \in \llbracket \lfloor n\alpha \rfloor + 1, \lfloor n\beta \rfloor \rrbracket$,

$$(1 - \varepsilon)^2 \leq \left(1 - \frac{\varepsilon k}{8k}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right) \leq (1 + \varepsilon)^2$$

et ainsi,

$$\left| \left(1 - \frac{\varepsilon k}{8k}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right) - 1 \right| \leq \varepsilon(2 + \varepsilon) \leq 3\varepsilon$$

d'où

$$\left| \frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \right| \leq 3\varepsilon \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

La suite $\left(\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \right)$ converge donc est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\left| \frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \right| \leq M\varepsilon$$

Ainsi, $\boxed{\frac{1}{4^n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$

Q 46. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $m_n = \begin{cases} \lfloor n\alpha \rfloor + 1 & \text{si } n\alpha + \frac{1}{2} \leq \lfloor n\alpha \rfloor + 1 \\ \lfloor n\alpha \rfloor + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$. On vérifie alors que $2k \in \llbracket \lfloor 2n\alpha \rfloor + 1, \lfloor 2n\beta \rfloor \rrbracket \iff k \in \llbracket m_n, \lfloor n\beta \rfloor \rrbracket$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = (T_{2n} \in [2n\alpha, 2n\beta]) = (T_{2n} \in \llbracket \lfloor 2n\alpha \rfloor + 1, \lfloor 2n\beta \rfloor \rrbracket) = \bigcup_{k=m_n}^{\lfloor n\beta \rfloor} (T_{2n} = 2k)$. D'après la question 42,

$$P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \sum_{k=m_n}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n}$$

et d'après les questions 45 et 43, et en utilisant le fait que $P(T_{2n} = m_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on trouve :

$$P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale en posant $t = u^2$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{2}{\sqrt{1-u^2}} du = 2[\arcsin(u)]_{\alpha}^{\beta}$$

Ainsi,

$$\boxed{P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha})\right).}$$

• • • FIN • • •