

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Ce sujet était composé de trois problèmes. Il balayait une grande partie du programme des deux années de TSI.

Problème 1 - Suites et calcul matriciel

Ce premier problème portait sur l'étude de suites par une méthode de calcul matriciel. Il traitait de la réduction des matrices, en particulier de la trigonalisation dans l'ensemble des matrices réelles.

Problème 2 - Une fonction définie à partir d'une intégrale

Ce problème traitait de l'étude par diverses méthodes d'une fonction définie par une intégrale. Il faisait appel aux connaissances sur l'intégrale généralisée et à diverses méthodes de calcul et d'encadrement afin de déterminer les caractéristiques principales de cette fonction.

Problème 3 - Étude d'un couple de variables aléatoires

L'objet de ce problème était l'étude d'une expérience aléatoire composée de deux étapes. Cette étude reposait sur des techniques usuelles de calcul des probabilités (probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, couple de variables aléatoires, etc.) et d'un point de vue calculatoire, sur l'utilisation de séries entières.

Le sujet était composé d'une alternance de questions de cours, calculatoires ou de réflexion. Il était d'une longueur raisonnable malgré le nombre important de questions. Chaque partie permettait d'interroger les candidats sur des notions importantes du programme.

En Algèbre, les calculs (déterminant, espaces propres, inverse d'une matrice, etc.) ont été dans une large mesure, très bien menés.

En Analyse, les intégrales généralisées ont posé problème à une partie des candidats, les calculs ont globalement été bien menés et les inégalités correctement manipulées.

La partie Probabilité est celle qui a posé le plus de problèmes, avec une séparation nette entre des candidats montrant une bonne maîtrise du sujet et d'autres ne connaissant pas les points élémentaires du cours. Cette partie a donc été moins réussie. Pourtant, une connaissance des éléments de base du cours (loi géométrique, formule des probabilités totales, définition de l'espérance) permettait de faire une bonne partie du problème.

Le sujet comportait de manière générale de nombreuses questions de cours ou d'application directe de celui-ci. Les copies des candidats montrant une connaissance correcte du cours ont donc été valorisées. Les correcteurs tiennent à souligner, même s'il s'agit peut-être d'une évidence, que cette connaissance est la condition indispensable à la réussite des étudiants pour l'épreuve de mathématiques. Les pratiques calculatoires sont bien sûr importantes, mais leur utilisation est souvent vaine s'il elle n'est pas adossée à une maîtrise des concepts de base.

Sur un autre plan, les correcteurs tiennent à souligner que les candidats doivent bien lire l'énoncé afin d'en comprendre les objectifs et d'en suivre le fil directeur. Ceci évite de refaire plusieurs fois la même démonstration ou d'utiliser une méthode fastidieuse alors que des raccourcis peuvent économiser des pages de calcul.

Enfin, même si le sujet ne comportait qu'une seule question de programmation, les correcteurs ont noté des efforts notables dans ce domaine.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

En Algèbre, les correcteurs ont constaté de fréquentes confusions entre diagonalisabilité, trigonalisabilité, symétrie, inversibilité ; ces propriétés ne sont pas interchangeables !

En Analyse, le cours n'est pas assez su par les candidats. De nombreuses questions de cours ont été mal, voire pas traitées (intégrales généralisées, développements en série entière usuels, etc.).

En Probabilités, les lois usuelles sont à apprendre et à utiliser correctement. Chaque loi est caractérisée par des situations (répétition finie/infinie d'une expérience de type Bernoulli, indépendance, etc.) qui permettent de l'identifier sans équivoque, et qui doivent être citées par les candidats.

Les erreurs spécifiques dans certains domaines du programme seront traitées en détail par la suite. Nous soulignons dans ce qui suit, les points généraux qui doivent globalement être améliorés :

- La présentation et la lisibilité sont satisfaisantes sur la plupart des copies. Les correcteurs tiennent à le souligner et à féliciter les candidats qui ont fait des efforts certains sur cet aspect. Une minorité d'irréductibles candidats continue cependant à adopter une présentation plus proche du brouillon que d'une copie de concours, à ne pas mettre en valeur leurs résultats, à ne pas traiter les questions dans l'ordre (ou à signaler des renvois clairs). De telles copies sont nécessairement jugées sévèrement.
- Une attention importante doit également être portée à l'orthographe, à la grammaire, à la conjugaison.
- La question de la rédaction est plus délicate et de nombreuses copies sont défailtantes sur ce point.
- Une réponse doit bien sûr être justifiée ; une réponse affirmative ou négative sans démonstration n'est pas recevable. Les correcteurs souhaitent également attirer fortement l'attention des candidats sur le fait qu'une réponse ne peut pas être uniquement un enchaînement de calculs, comme on le voit trop souvent. Ces calculs doivent être introduits par une phrase, même courte. Les variables doivent être déclarées, les enchaînements logiques soulignés par des mots de liaison, les questions dont on utilise un résultat, signalées explicitement. L'objectif est bien sûr de rendre la copie agréable à lire pour le correcteur, mais plus fondamentalement, de structurer le raisonnement des étudiants.

La qualité de cette rédaction marque souvent la différence entre une copie correcte et une très bonne copie.

Enfin, nous terminons sur un point plus marginal mais qui peut agacer énormément le correcteur. Afin que les candidats ne soient pas bloqués lorsqu'ils ne réussissent pas une question, de nombreux résultats intermédiaires sont fournis par l'énoncé. Certains candidats en profitent pour se contenter de réécrire la formule à démontrer affublée d'un vague argument, ou bien pour trafiquer leurs calculs afin d'arriver au résultat annoncé. Ces cas, minoritaires, sont appréciés et traités à leur juste valeur par les correcteurs.

3/ RAPPORT DÉTAILLÉ

PROBLÈME 1 / Partie I - Éléments propres d'une matrice

Q1. Cette question a été globalement bien réussie.

Q2. Cette question comportait une imprécision ; l'énoncé aurait dû mentionner : « trigonalisable dans l'ensemble des matrices à coefficients réels ». Le cas échéant, le problème posé par cette imprécision a été jugé en faveur du candidat.

Ceci étant dit, on constate de nombreuses confusions sur cette question (en particulier, c'est le polynôme caractéristique qui est scindé, pas la matrice !).

Q3. Certaines copies présentent ici des problèmes de raisonnement : il n'y a pas de lien direct entre diagonalisabilité et inversibilité. Par ailleurs, trop peu de candidats pensent à utiliser le fait que 0 n'est pas valeur propre et repartent dans des calculs.

Q4. Les calculs d'espaces propres sont généralement menés à bien et de façon efficace. Le point du cours permettant de montrer la diagonalisabilité est la plupart du temps connu.

PROBLÈME 1 / Partie II - Trigonalisation de A

Q5. Une famille libre de 3 vecteurs de \mathbb{R}^3 est automatiquement une base. Il est inutile de vérifier la liberté et le caractère générateur de la famille. Certains candidats semblent de plus penser qu'une famille de trois éléments dans \mathbb{R}^3 est automatiquement génératrice.

Q6. Ce point est au centre du cours sur la représentation matricielle des endomorphismes et se révélait assez déterminant. Une partie importante des étudiants a correctement traité cette question. Lorsque ce n'était pas le cas, cela révélait souvent un manque de compréhension du problème dans sa globalité.

Q7. Cette question a été traitée correctement dans un grand nombre de copies. Cependant, plutôt que de calculer l'inverse de P avec la méthode de Gauss, il était considérablement plus rapide d'effectuer le produit de P et de la matrice proposée.

Q8. La formule de changement de base est la plupart du temps connue des candidats.

PROBLÈME 1 / Partie III - Calcul des puissances de T

Q9. Cette question est, la plupart du temps, traitée correctement. Attention cependant : la commutativité concerne le produit matriciel et pas la somme.

Q10. Après le calcul de N^2 , une justification était attendue pour les puissances supérieures.

Q11. Il faut citer explicitement la formule du binôme de Newton. Par ailleurs, celle-ci exige la commutativité des matrices en jeu. Enfin, cette question demande une expression explicite de la puissance n -ième de N , pas seulement une formule contenant D et N .

Q12. Cette question a été, la plupart du temps, bien traitée. Une justification explicite par un calcul était attendue.

Q13. Cette question a été, la plupart du temps, bien traitée. Il fallait invoquer les suites géométriques ou une récurrence immédiate afin de convaincre les correcteurs.

Q14. La récurrence est effectuée correctement, la plupart du temps.

Q15. Cette question a été régulièrement bien traitée par les candidats ayant réussi les questions précédentes.

PROBLÈME 2 / Partie I - Définition de la fonction

Q16. La valeur de l'intégrale est en général déterminée avec succès, par contre, sa convergence n'a pas souvent été traitée correctement. Il s'agit pourtant d'un des exemples basiques du cours sur les intégrales généralisées.

Q17. Question assez régulièrement bien traitée.

Q18. Le lien entre les questions 16, 17 et 18 est souvent établi de manière trop confuse. Attention à ne pas parler d'équivalence d'intégrales (mais seulement des intégrandes).

PROBLÈME 2 / Partie II - Calcul de $f(n)$ pour un entier naturel positif n

Q19. Cette question a généralement été bien traitée. Une partie non négligeable de candidats tente cependant de faire une intégration par parties sans utiliser l'indication.

Q20. La formule de factorisation n'est pas connue de la plupart des candidats, ce qui a souvent mené à des manipulations très douteuses amenant miraculeusement à la formule fournie par l'énoncé.

Q21. Question peu abordée, mais bien traitée quand ce fut le cas.

Q22. Question souvent abordée et traitée assez correctement dans l'ensemble.

PROBLÈME 2 / Partie III - Variations de f

Q23. Cette question a souvent été mal traitée. La définition de la décroissance était attendue, et non une référence à la dérivée. Par ailleurs, l'utilisation des quantificateurs est souvent approximative. On voit aussi des confusions avec les suites.

Q24. Cette question a souvent été traitée de manière approximative. En particulier, il faut citer la croissance ou la positivité de l'intégrale et ne pas se contenter de lignes de calcul.

Q25. Question régulièrement bien traitée, bien que parfois de façon fort fastidieuse. Par ailleurs, là encore, il faut citer la positivité ou la croissance de l'intégrale.

Q26. Une grande partie des candidats a trouvé les limites demandées. Il faut toutefois citer le théorème d'encadrement, dit « des gendarmes », afin de conclure.

Q27. Les graphiques clairs et précis, ce qui n'est pas toujours le cas, ont bien sûr été valorisés.

PROBLÈME 2 / Partie IV - Équivalent de f en l'infini

Q28. Cette question a été traitée correctement par la plupart des candidats.

Q29. Cette question a souvent été traitée de manière imprécise. Il fallait invoquer la décroissance de f à bon escient.

Q30. Cette question arrivant en fin de problème a été traitée par une minorité des candidats. Lorsque ça a été le cas, les arguments pour obtenir l'équivalence étaient souvent imprécis. La méthode la plus directe est d'utiliser un quotient puis le théorème d'encadrement (à nouveau).

PROBLÈME 3 / Partie I - Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

Q31,32,33. Il s'agit de questions élémentaires de cours sur les séries entières. Or, de trop nombreuses copies fournissent des réponses fausses ou approximatives (intervalle au lieu du rayon, confusion avec les développements limités, somme partielle au lieu de la somme, etc.).

PROBLÈME 3 / Partie II - Loi et espérance de X

Q34. Cette question marque le tournant vers la partie « probabilités » du problème. Celui-ci s'avère périlleux sur une partie importante des copies.

Concernant la loi demandée, certains candidats fournissent des réponses farfelues (loi binomiale, Bernoulli) à ce qui est pourtant une question de cours !

Par ailleurs, il est impératif de justifier pourquoi la loi est géométrique : répétition d'expériences identiques de type Bernoulli, de façon indépendante, jusqu'à l'apparition d'un premier succès.

Q35. Au-delà du calcul souvent bien effectué, une justification de l'existence de l'espérance par la convergence absolue de la série était attendue.

PROBLÈME 3 / Partie III - Loi de N

Q36. Cette question est souvent mal comprise par les candidats dont la réponse comprend fréquemment un « n », ce qui est incohérent ici.

Q37. Le traitement de cette question a reflété la bonne compréhension de l'énoncé (ou non) par les candidats.

Q38. Il faut ici citer la formule des probabilités totales ainsi que le système complet d'événements utilisé.

Q39. Trop peu de candidats ont vu le lien avec la question 33.

PROBLÈME 3 / Partie IV - Étude de l'indépendance de X et N

Q40. De nombreux candidats répondent à cette question de manière très imprécise (en particulier avec une confusion entre événement et variable aléatoire).

Q41. Cette question a régulièrement été bien traitée. Une proportion non négligeable des candidats perd son temps à (mal) calculer la valeur exacte de $P(N = 2)$, pourtant non demandée, et n'aboutit pas.

Q42. Cette question révélait également la bonne compréhension (ou non) de l'ensemble du problème. Une justification de la nullité de la probabilité de l'intersection ainsi que de la dépendance étaient attendues.

PROBLÈME 3 / Partie V - Espérance de N

Q43,44,45. Ces questions étaient assez techniques et n'ont été bien traitées que sur les meilleures copies. Là encore, une justification précise de l'existence de l'espérance par la convergence absolue d'une série était attendue.

Q46. L'inégalité entre les espérances a été souvent correctement démontrée, en étudiant le signe de la différence. En revanche, la partie sur la prévisibilité du résultat a donné lieu à des justifications douteuses. Ce qui était attendu était la remarque suivante (informelle car l'inégalité nécessaire n'est pas au programme). Pour chaque tirage, la valeur de N était inférieure ou égale à celle de X . Comme l'espérance représente la moyenne, il est logique que l'on ait également l'espérance de N inférieure ou égale à celle de X .

4/ CONCLUSION

Les points qui ressortent de ce rapport sont classiques mais méritent d'être répétés.

Au-delà du calcul, la maîtrise du cours et la précision dans son application sont indispensables à la réussite de cette épreuve de mathématiques. La clarté et la cohérence de la copie sont des éléments importants d'appréciation.

Comme c'est l'usage, les remarques faites dans ce rapport insistent, la plupart du temps, sur les lacunes des candidats. Les correcteurs tiennent néanmoins à souligner avoir constaté, dans un nombre important de copies, une connaissance satisfaisante du cours et une bonne qualité des raisonnements. De très bonnes copies ont de plus révélé des techniques de démonstration maîtrisées et une réelle efficacité dans la rédaction. Nous invitons tous les futurs candidats à poursuivre leur travail afin d'atteindre ces objectifs.