Épreuve CCINP mathématiques 2023

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

.

Consignes :
- La calculatrice n'est pas autorisée
- le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

Problème 1 : Suite et calcul matriciel.

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = \qquad v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } \ n \geqslant 0,\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Partie I - Éléments propres d'une matrices

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

Q 1. Montrer que le polynôme caractéristique χ_A de A a pour expression : $\chi_A(x) = (x-2)(x-1)^2$. En déduire les valeurs propres de A.

☞ On détermine le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = = \operatorname{Det}(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (x-2)\left((x-1)^2 - 1\right) + \underbrace{(-1 + x - 1)}_{(x-2)} = (x-2)(x-1)^2$$

☞ Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, donc 1 et 2.

Q 2. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifier la réponse.

☞ Le polynôme caractéristique de A est scindé, la matrice A est donc trigonalisable.

Q 3. La matrice A est-elle inversible ?

☞ 0 n'est pas valeur propre de A donc la matrice A est inversible. (En effet $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ puisque 0 n'est pas valeur propre)

Q 4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

☞ On détermine l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 puisque son ordre de multiplicité est 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$, alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ z \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ z=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$$

☞ Donc $E_1 = \mathrm{Vect}(b_2)$ où $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\dim(E_1) = 1 < 2$ (2 étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1) donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

Partie II - Trigonalisation de A

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0,1,1)$, $b_2 = (1,1,0)$ et $b_3 = (0,0,1)$.

Q 5. Montrer que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Det}(b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times 1 = -1 \neq 0$$

Donc la famille $\mathscr{B}$ est une base puisque le déterminant précédent est non nul (La famille est libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ c'est donc une base)

Q 6. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

☞ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(b_1) = 2b_1$.

☞ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f(b_2) = b_2$.

☞ Et enfin :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $f(b_3) = b_2 + b_3$.

☞ Donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes étant les coordonnées de $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Q 7. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B}$.

Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ Les vecteurs colonnes de P sont les vecteurs de $\mathscr{B}$ exprimés dans la base canonique : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☞ Un calcul immédiat permet d'obtenir que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q 8. Déterminer une relation entre A, P, T P^{-1}.

☞ Avec la formule $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$, on a $A = PTP^{-1}$.

Partie III - Calcul des puissances de T et expression de u_n, v_n, w_n

Q 9. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

☞ $D = T - N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ $DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$ et $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$.

Donc D et N commutent.

Q 10. Que vaut N^n pour tout entier $n \geqslant 2$?

☞ $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ la matrice nulle. Donc $\forall n \geqslant 2,\ N^n = N^2 N^{n-2} = 0N^{n-2} = 0$.

Q 11. Déduire de ce qui précède une expression de T^n. On donnera chacun de ses coefficients.

☞ Par une récurrence évidente $\forall n \geqslant 1,\ ND^n = ND$ puisque $ND = N$. Un calcul direct simple permet aussi de l'obtenir.

☞ Comme N et D commutent, nous pouvons utiliser le binôme de Newton :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \underbrace{=}_{N^2=0 \text{ si } n\geqslant 2} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1}$$

$$= D^n + nN = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q 12. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.

☞ On vérifie immédiatement que $X_{n+1} = AX_n$, en effet :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n + w_n \\ v_n + w_n \\ -u_n + v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

Q 13. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

☞ L'hypothèse : P_n : " $X_n = A^n X_0$" pour $n \in \mathbb{N}$.

☞ Initialisation : Puisque $A^0 = I_3$ et $A^0 X_0 = X_0$, donc P_0 est vrai.

☞ Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vrai, alors :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

☞ On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

Q 14. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}. Démontrer cette relation par récurrence.

☞ L'hypothèse : H_n : " $A^n = PT^nP^{-1}$" pour $n \in \mathbb{N}$.

☞ Initialisation : Puisque $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = I_3$, H_0 est vrai.

☞ Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vrai, alors :

$$A^{n+1} = AA^n = PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Donc $H_n \Rightarrow H_{n+1}$.

☞ On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.

Q 15. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et de w_n en fonction de n.

☞ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n & 2^n & 0 \\ 1+n & -n & n \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n & -n & n \\ -2^n+n+1 & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1+n & -n & n \\ -2^n+n+1 & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n \\ -2^n+n+1 \\ 1-2^n \end{pmatrix}$$

Problème 2 : Une fonction définie à partir d'une intégrale

Présentation générale

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'application : automatique, traitement du signal, etc.

On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

Partie I - Définition de la fonction

Q 16. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.

☞ Si $\alpha \neq -1$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$, on a :

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right)$$

☞ Donc $\displaystyle\int_\varepsilon^1 t^\alpha \mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $\alpha \to 0$ que si $\alpha > -1$ et alors :

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha+1}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$

☞ Par ailleurs $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t$ diverge si $\alpha < -1$. En effet, puisque $\alpha+1<0$, on a :

$$\varepsilon^{\alpha+1} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{donc} \qquad \int_\varepsilon^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

☞ Enfin pour $\alpha = -1$

$$\int_\varepsilon^1 t^{-1} \mathrm{d}t = [\ln(t)]_\varepsilon^1 = (\ln(1) - \ln(\varepsilon)) = -\ln(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc là encore $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t$ diverge.

Q 17. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers O^+, de la fonction définie sur $]0,1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.

☞ Comme $1+t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \times \dfrac{1}{t^{x-1}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$

Q 18. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

☞ D'après la question **Q16** $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x-1 > -1$ (c.a.d $x > 0$).

☞ Or $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

On définit alors sur $]0,+\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie II - Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q 19. Montrer que $f(1) = \ln(2)$, puis que $f(2) = 1 - \ln(2)$. On pourra remarquer que, pour tout $t \in [0,1]$:

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

☞ Calcul de $f(1)$:

$$f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

☞ Par ailleurs :

$$f(1) + f(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t = [t]_0^1 = 1$$

Donc $f(2) = 1 - f(1) = 1 - \ln(2)$

Q 20. Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $n \geqslant 1$:

$$1 - (-t)^n = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$$

☞ Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k$$

☞ Donc $1 - (-t)^n = 1^n - (-t)^n = (1-(-t))\sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-k}(-t)^k = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$

Q 21. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$f(n) = (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

On pourra remarquer que, pour $n \geqslant 2$ et $t \in [0,1]$: $t^{n-1} = (-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$.

☞ Donc :

$$\begin{aligned}
f(n) &= \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}(-t)^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\underbrace{\left((-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}\left(1-(-t)^{n-1}\right)\right)}_{(-1)^{n-1}(-t)^{n-1}}\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \underbrace{+(-1)^n}_{-(-1)^{n-1}} \int_0^1 \frac{1}{1+t}\left(1-(-t)^{n-1}\right)\mathrm{d}t \\
&\underbrace{=}_{\textbf{Q20}} (-1)^{n-1}f(1) + (-1)^n \int_0^1 \frac{1}{1+t} \times \left((1+t)\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k\right)\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \int_0^1 t^k\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\
&= (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Q 22. Écrire une fonction python d'en-tête `def fEntier(n) :` qui calcule $f(n)$ à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On supposera la fonction `log` (pour *ln*) importée de la bibliothèque **numpy**.

```python
import numpy as np
def fEntier(n):
    if n==1:
        return np.log(2)
    else:
        som=1
        for k in range(1,n-1):
            som=som+(-1)**k/(k+1)
        return (-1)**(n-1)*np.log(2)+(-1)**n*som
```

On peut aussi remarquer que $f(n+1) = -f(n) + \dfrac{1}{n-1}$ et proposer le programme récursif :

```python
import numpy as np
def fEntier(n):
    if n==1:
        return np.log(2)
    else:
        return fEntier(n-1)+1/(n-1)
```

Partie III - Variations de f

Q 23. Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

☞ Soit g une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors g est dite décroissante si :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

Q 24. Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leqslant \beta$. Comparer, pour tout $t \in]0,1]$, t^α et t^β.
En déduire que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

- ☞ $\forall t \in]0,1],\ \ln(t) \leqslant 0$
- ☞ Donc pour $t \in]0,1]$:

$$-1 < \alpha \leqslant \beta \Rightarrow -\ln(t) > \alpha\ln(t) \geqslant \beta\ln(t) \underbrace{\Rightarrow}_{\exp \text{ croissante strict sur } \mathbb{R}} e^{-\ln(t)} \geqslant e^{\alpha\ln(t)} > e^{\beta\ln(t)} \Rightarrow \frac{1}{t} \geqslant t^\alpha \geqslant t^\beta$$

- ☞ Donc pour $t \in]0,1]$ et $0 < x \leqslant y$ (donc $-1 < x-1 \leqslant y-1$), on a en appliquant le résultat ci-dessus :

$$t^{x-1} \geqslant t^{y-1} \Rightarrow \frac{t^{x-1}}{1+t} \geqslant \frac{t^{y-1}}{1+t}$$

- ☞ Donc pour $0 < x \leqslant y$, on a par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{t^{y-1}}{1+t}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

- ☞ Donc $0 < x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
  La fonction f est donc décroissante.

Q 25. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0,1]$:

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} \leqslant t^{x-1}.$$

En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

- ☞ Pour tout $x > 0$ et $t \in]0,1]$: $t^{x-1} > 0$.
- ☞ Donc tout $x > 0$ et $t \in]0,1]$, on a :

$$0 < t \leqslant 1 \Rightarrow 1 < 1+t \leqslant 2 \underbrace{\Rightarrow}_{x \mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur }]0,+\infty[} \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t} < 1 \Rightarrow \frac{t^{x-1}}{2} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} < t^{x-1}.$$

- ☞ Donc par croissance de l'intégrale, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t \Rightarrow \left[\frac{t^x}{2x}\right]_0^1 \leqslant f(x) \leqslant \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

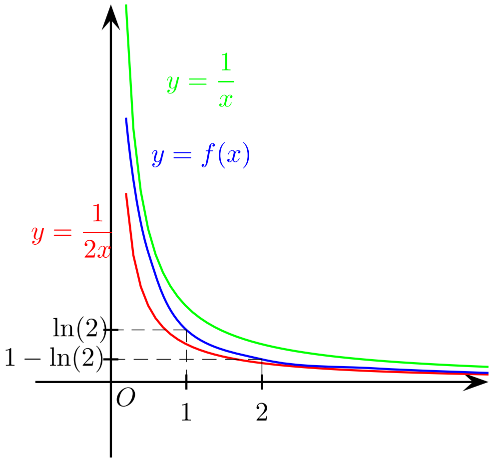
Q 26. En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

☞ Comme $\frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors par théorème de comparaison (dit des *"gendarmes"* ici) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

☞ Comme $\frac{1}{2x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ alors par théorème de comparaison $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$.

Q 27. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).
Les axes sont asymptotes horizontale pour (Ox) et vertical pour Oy). La courbe est comprise entre les représentations de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2x}$.

Représentation graphique :



Partie IV - Équivalent de f en $+\infty$

Q 28. Montrer que, pour $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}.$$

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^x}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\frac{t+1}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

Q 29. En utilisant le résultat de la question **Q24**, montrer que, pour $x > 1$:

$$f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x-1).$$

☞ Pour $x > 1$, par décroissance de la fonction f :

$$x+1 \geqslant x \geqslant x-1 \Rightarrow f(x+1) \leqslant f(x) \leqslant f(x-1) \Rightarrow \underbrace{f(x+1)+f(x)}_{\frac{1}{x}} \leqslant 2f(x) \leqslant \underbrace{f(x)+f(x-1)}_{\frac{1}{x-1}}.$$

Q 30. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

☞ Avec la question précédente, pour $x > 1$, par décroissance de la fonction f :

$$\frac{1}{x} \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{1}{x-1} \Rightarrow 1 \leqslant 2xf(x) \leqslant \frac{x}{x-1}$$

☞ Comme $\frac{x}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, on a $\frac{x}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puis par le théorème de comparaison (dit des *"gendarmes"* encore)

$$2xf(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

☞ Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Problème 3 : Étude d'un couple de variables aléatoires

Présentation générale

On considère l'expérience aléatoire suivante.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec une probabilité $1-p$. On effectue une répétition de lancers de cette pièce. Si le premier Pile a été obtenu au n-ème lancer, on place n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n dans une urne et on pioche une de ces boules au hasard. On admet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire. On note alors :

— X la variable aléatoire représentant le rang du premier Pile obtenu dans la suite de lancers ;

— N la variable aléatoire représentant le numéro de la boule piochée ensuite dans l'urne.

Prenons un exemple de tirage pour fixer les idées (on note P pour Pile, F pour Face). Si les lancers successifs de la pièce donnent FFFPFF..., alors X vaut 4. On place alors quatre boules numérotées de 1 à 4 dans l'urne (on a alors une chance sur quatre de piocher chacune d'entre elles au tirage qui suit). Le but de l'exercice est de décrire certains aspects des lois de X et N.

Partie I - Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

On considère dans cette partie des séries d'une variables réelles.

Q 31. Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$.

☞ Le rayon de convergence de la série géométrique est 1. (par exemple : $\sum\limits_{n=0}^{N} x^n = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$ donc la suite des sommes partielles converge ssi $x<1$)

☞ On a alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, développement en série entière usuel.

Q 32. Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série dérivée de la précédente série.

☞ La série dérivée a même rayon de convergence que la série elle-même donc 1 ici.

☞ Et si l'on note pour $x \in]-1,1[$ l'expression $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ alors $f'(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Q 33. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$. On précisera le rayon de convergence de cette série entière.

☞ Comme $h : x \mapsto -\ln(1-x)$ est une primitive de la série géométrique (puisque $h'(x) = \dfrac{1}{1-x}$), on a donc $\ln(1-x) = \ln(1-0) - \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n} = -\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est son rayon de converge est le même que la série géométrique, c'est-à-dire 1.

Partie II - Loi et espérance de X

Q 34. Rappeler la loi de X. On précisera l'ensemble des valeurs prises par X (noté $X(\Omega)$) et, pour chaque entier n dans cet ensemble, la valeur de $P(X=n)$.

☞ On a ici une répétition d'expériences identiques de type Bernoulli, de façon indépendante, jusqu'à l'apparition d'un premier succès.

☞ X donnant le rang du premier succès est donc une *loi géométrique* dont le paramètre est la probabilité p d'un succès.

☞ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = (1-p)^{n-1}p$

Q 35. Justifier l'existence de l'espérance de X, notée $E(X)$, et calculer celle-ci.

☞ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = nP(X=n) = np(1-p)^{n-1}$.

☞ Les a_n sont positifs et on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{p(n+1)(1-p)^n}{pn(1-p)^{n-1}} = \dfrac{(1-p)(n+1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-p < 1$.

☞ Donc la série des $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ convergence absolument (critère de d'Alembert).

☞ On reconnait alors dérivée de la série géométrique vue Partie I avec $x = (1-p)$ et

$$E(X) = \sum_{n\geqslant 1} nP(X=n) = \sum_{n\geqslant 1} pn(1-p)^{n-1} = p\sum_{n\geqslant 1} n(1-p)^{n-1} = p\frac{1}{\left(1-(1-p)\right)^2} = \frac{1}{p}$$

Partie III - Loi de N

Q 36. Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? On le notera $N(\Omega)$.

☞ On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, puisque la valeur de N varie entre 1 et X et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Q 37. Donner, pour tout $n \in X(\Omega)$ et $k \in N(\Omega)$, la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{[X=n]}(N = k)$.
On distinguera les cas $1 \leqslant k \leqslant n$ et $k > n$.

☞ Soit $n \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, sachant $[X = n]$ (c.a.d le premier "Pile" est obtenir au n-ième lancer), l'urne est constituée de n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n avec donc équiprobabilité d'obtenir $k \in [\![1, n]\!]$. (En revanche, il est impossible d'obtenir une valeur supérieure à n)

☞ Donc $P_{[X=n]}(N = k) = \dfrac{1}{n}$ si $k \in [\![1, n]\!]$.

☞ Et $P_{[X=n]}(N = k) = 0$ si $k > n$.

Q 38. Montrer que, pour $k \in N^*$:

$$P(N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1 - p)^{n-1}.$$

On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.

☞ $([X = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements (événements 2 à 2 incompatibles, et dont la réunion fait Ω).

☞ On peut utiliser la formule des probabilités totales (avec $[N = k] \cap [X = n] = \emptyset$ si $n < k$) :

$$\begin{aligned} P(N = k) &= P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} ([N = k] \cap [X = n])\right) = P\left(\bigcup_{n\geqslant k} ([N = k] \cap [X = n])\right) = \sum_{n\geqslant k} P\left([N = k] \cap [X = n]\right) \\ &= \sum_{n\geqslant k} \left(P(X = n) \times P_{[X=n]}(N = k)\right) = \sum_{n\geqslant k} \frac{1}{n} p(1 - p)^{n-1} \end{aligned}$$

Q 39. Calculer la valeur de $P(N = 1)$.

☞ On reconnait le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 - x)$ évalué en $1 - p$ (voir partie I), donc :

$$P(N = 1) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} p(1 - p)^{n-1} = \frac{p}{1 - p} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(1 - p)^n}{n} = -\frac{p}{1 - p} \ln(1 - (1 - p)) = \frac{-p \ln(p)}{1 - p}$$

Partie IV - Étude de l'indépendance de X et N

Q 40. Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies sur un espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans les ensembles (finis) E_1 et E_2.
On admettra que cette définition s'étend au contexte de notre problème (où X et N sont des variables aléatoires prenant un nombre infini de valeurs).

☞ Soient deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies sur un espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans les ensembles (finis) E_1 et E_2, alors Y_1 et Y_2 sont indépendantes ssi :

$$\forall (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2,\ P\left((Y_1 = y_1) \cap (Y_2 = y_2)\right) = P\left(Y_1 = y_1\right) \times P\left(Y_2 = y_2\right)$$

Q 41. Montrer que $P(N = 2) > 0$.

☞ $P(N = 2) \geqslant P((N = 2) \cap (X = 2)) = P(N = 2) \times P_{[X=2]}(N = 2) = (1 - p)p \times \dfrac{1}{2} > 0$

Q 42. Que vaut $P([X = 1] \cap [N = 2])$?
Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

☞ $P([X = 1] \cap [N = 2]) = 0$ (pas de boule numéroté 2 dans l'urne) et $\underbrace{P(X = 1)}_{p\neq 0} \times \underbrace{P(N = 2)}_{\neq 0} \neq 0$ donc $P([X = 1] \cap [N = 2]) \neq \underbrace{P(X = 1)}_{p} \times P(N = 2)$

☞ Donc les variables aléatoires X et N ne sont pas indépendantes.

Partie V - Espérance de N

Q 43. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N=k) \leqslant (1-p)^{k-1}$.
On pourra remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant k$:

$$\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1} \leqslant p(1-p)^{n-1}$$

☞ On a :

$$P(N=k) = \sum_{n \geqslant k} \frac{1}{n}p(1-p)^{n-1} \leqslant \sum_{n \geqslant k} p(1-p)^{n-1} = p(1-p)^{k-1}\sum_{n\geqslant 0}(1-p)^n = p(1-p)^{k-1} \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{k-1}$$

☞ Or :

$$\sum_{n\geqslant k} p(1-p)^{n-1} = p(1-p)^{k-1}\sum_{n\geqslant 0}(1-p)^n = p(1-p)^{k-1} \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{k-1}$$

☞ Donc :

$$P(N=k) \leqslant (1-p)^{k-1}$$

Q 44. En déduire que N admet une espérance et que :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{k}{n}p(1-p)^{n-1}$$

☞ Avec la question précédente, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant k \times P(N=k) \leqslant k(1-p)^{k-1}$

☞ Or la série des $k(1-p)^{k-1}$ est absolument convergente puisque $(1-p) < 1 = R$ (voir partie I, dérivée de la série géométrique) donc N admet une espérance.

☞ On a vu question **Q38** $P(N=k) = \sum_{n\geqslant k}\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1}$. On obtient alors :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{k}{n}p(1-p)^{n-1}$$

Q 45. On admet que le calcul de cette espérance peut-être effectué en intervertissant l'ordre de sommation et que l'on a :

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}p(1-p)^{n-1}$$

Calculer alors cette espérance et montrer que l'on a :

$$E(N) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

$$\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{k}{n}p(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}p(1-p)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p(1-p)^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p(1-p)^{n-1}}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}\right) \\
&= \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(1-p)^{n-1} = \frac{p}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)(1-p)^{n-1} && \text{puisque le premier terme est nul} \\
&= \frac{p(1-p)}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-p)^{n-1} && \text{par changement d'indice et factorisation par } (1-p) \\
&= \frac{p(1-p)}{2(1-(1-p))^2} = \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right) && \text{voir Partie I la série géométrique dérivée.}
\end{aligned}$$

Q 46. Montrer que $E(N) \leqslant E(X)$.
Ce résultat était-il prévisible ?

☞ On a :

$$E(N) \leqslant E(X) \Leftrightarrow \frac{p-1}{2p} \leqslant \frac{1}{p} \Leftrightarrow p-1 \leqslant 2 \Leftrightarrow p \leqslant 3 \qquad \text{(vrai car } p<1)$$

☞ Ce résultat était prévisible puisque $N \leqslant X$, dés lors on a $E(X-N) = E(X)-E(N) \geqslant 0$ donc $E(X) \geqslant E(N)$.