

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Suites et calcul matriciel

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases} .$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour } n \geq 0, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} .$$

Partie I - Éléments propres d'une matrice

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice dans la base canonique.

- Q1.** Montrer que le polynôme caractéristique χ_A de A a pour expression : $\chi_A(x) = (x - 2)(x - 1)^2$.
En déduire les valeurs propres de A .
- Q2.** La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifier la réponse.
- Q3.** La matrice A est-elle inversible ?
- Q4.** La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.

Partie II - Trigonalisation de A

On considère les éléments suivants de \mathbb{R}^3 : $b_1 = (0, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.

- Q5.** Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Q6.** Montrer que la matrice de f dans la base \mathcal{B} est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Q7.** On note P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à \mathcal{B} .

Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Q8.** Déterminer une relation entre A , P , T , P^{-1} .

Partie III - Calcul des puissances de T et expression de u_n, v_n, w_n

Q9. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

Q10. Que vaut N^n pour un entier $n \geq 2$?

Q11. Dédire de ce qui précède une expression de T^n . On donnera chacun de ses coefficients.

Q12. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1} , A et X_n .

Q13. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .

Q14. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n , P et P^{-1} . Démontrer cette relation par récurrence.

Q15. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et de w_n en fonction de n .

PROBLÈME 2

Une fonction définie à partir d'une intégrale

Présentation générale

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'applications : automatique, traitement du signal, etc.

On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

Partie I - Définition de la fonction

Q16. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha dt$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α .

Q17. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers 0^+ , de la fonction définie sur $]0, 1]$ par $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$.

Q18. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

On définit alors sur $]0; +\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt .$$

La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f .

Partie II - Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q19. Montrer que $f(1) = \ln(2)$, puis que $f(2) = 1 - \ln(2)$. On pourra remarquer que, pour $t \in [0, 1]$:

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} .$$

Q20. Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que, pour $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - (-t)^n = (1+t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k .$$

Q21. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$f(n) = (-1)^{n-1} \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k+1} .$$

On pourra remarquer que, pour $n \geq 2$ et $t \in [0, 1]$: $t^{n-1} = (-1)^{n-1} (-t)^{n-1}$.

- Q22.** Écrire une fonction **python** d'en-tête `def fEntier(n)` : qui calcule $f(n)$ à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On supposera la fonction `log` (pour `ln`) importée de la bibliothèque **numpy**.

Partie III - Variations de f

- Q23.** Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R} .
- Q24.** Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leq \beta$. Comparer, pour $t \in]0, 1]$, t^α et t^β .
En déduire que f est décroissante sur $]0; +\infty[$.
- Q25.** Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0, 1]$:

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1}.$$

En déduire que, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

- Q26.** En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0 .
- Q27.** Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).

Partie IV - Équivalent de f en $+\infty$

- Q28.** Montrer que, pour $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}.$$

- Q29.** En utilisant le résultat de la question **Q24**, montrer que, pour $x > 1$:

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1).$$

- Q30.** En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

PROBLÈME 3

Étude d'un couple de variables aléatoires

Présentation générale

On considère l'expérience aléatoire suivante.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec une probabilité $1 - p$. On effectue une répétition de lancers de cette pièce. Si le premier Pile a été obtenu au n -ème lancer, on place n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n dans une urne et on pioche une de ces boules au hasard.

On admet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire. On note alors :

- X la variable aléatoire représentant le rang du premier Pile obtenu dans la suite de lancers ;
- N la variable aléatoire représentant le numéro de la boule piochée ensuite dans l'urne.

Prenons un exemple de tirage pour fixer les idées (on note P pour Pile, F pour Face). Si les lancers successifs de la pièce donnent FFFPFF..., alors X vaut 4. On place alors quatre boules numérotées de 1 à 4 dans l'urne (on a alors une chance sur quatre de piocher chacune d'entre elles au tirage qui suit).

Le but de l'exercice est de décrire certains aspects des lois de X et N .

Partie I - Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

On considère dans cette partie des séries entières d'une variable réelle.

- Q31.** Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$.
- Q32.** Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série dérivée de la précédente.
- Q33.** Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$. On précisera le rayon de convergence de cette série entière.

Partie II - Loi et espérance de X

- Q34.** Rappeler la loi de X . On précisera l'ensemble des valeurs prises par X (noté $X(\Omega)$) et, pour chaque entier n dans cet ensemble, la valeur de $P(X = n)$.
- Q35.** Justifier l'existence de l'espérance de X , notée $E(X)$, et calculer celle-ci.

Partie III - Loi de N

- Q36.** Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? On le notera $N(\Omega)$.
- Q37.** Donner, pour $n \in X(\Omega)$ et $k \in N(\Omega)$, la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{[X=n]}(N = k)$. On distinguera les cas $1 \leq k \leq n$ et $k > n$.
- Q38.** Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.

- Q39.** Calculer la valeur de $P(N = 1)$.

Partie IV - Étude de l'indépendance de X et N

Q40. Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies sur un espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans les ensembles (finis) E_1 et E_2 .

On admettra que cette définition s'étend au contexte de notre problème (où X et N sont des variables aléatoires prenant un nombre infini de valeurs).

Q41. Montrer que $P(N = 2) > 0$.

Q42. Que vaut $P([X = 1] \cap [N = 2])$?

Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

Partie V - Espérance de N

Q43. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N = k) \leq (1 - p)^{k-1}$.

On pourra remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq k$:

$$\frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} \leq p(1-p)^{n-1}.$$

Q44. En déduire que N admet une espérance et que :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

Q45. On admet que le calcul de cette espérance peut être effectué en intervertissant l'ordre de sommation ; et que l'on a :

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

Calculer alors cette espérance et montrer que l'on a :

$$E(N) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

Q46. Montrer que $E(N) \leq E(X)$.

Ce résultat était-il prévisible ?

FIN

