SESSION 2023 PSI8M

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ p_{ij} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur du réel α.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.
3. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
5. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y = i]).$$

   Calculer les b_{ij}.
6. Déterminer $\mathbf{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(B)$.
7. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.
8. Démontrer que $B^2 = \mathbf{tr}\,(B)\,B$.
9. Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{n+1} - 1$ par $X - 1$.
2. Donner, sans justification, la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ ainsi que son ensemble de définition.

*****

3. **Étude d'une suite**

   3.1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

   3.2. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t + \cdots + t^n}\,\mathrm{d}t$.
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

4. Étude de la série de terme général $u_n - \ell$

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul p, et tout réel $t \in [0,1]$, on pose $g_p(t) = (1-t)\,t^{p(n+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.

4.2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.

4.3. En utilisant la série de fonctions définie au **4.1**, démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)\,((n+1)p+1)}.$$

4.4. Pour tout p entier naturel non nul, on pose $h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)\,((t+1)p+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

4.5. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On admettra que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE 3

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et on rappelle que :

$$\forall\,(M,N) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2,\ \ (M\,N)^\top = N^\top M^\top.$$

L'espace $E = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall\,(X,Y) \in E^2\,,\ \ (X|Y) = X^\top Y$$

et pour tout vecteur X de E , sa norme est notée

$$||X|| = \sqrt{X^\top X}.$$

Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1.

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est de type n lorsque $A^\top = A^n$.

1. Quelques exemples

1.1. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 0.

1.2. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1.

1.3. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type -1.

En donner un exemple différent de la matrice identité lorsque $p = 4$.

On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 2.

2. **Dans cette question et uniquement dans cette question**, on prend $p = 3$ et pour tout réel θ, on note :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2.1. Démontrer que l'on a : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ (A(\theta))^m = A(m\theta)$.

2.2. Déterminer alors l'ensemble des réels θ tels que $A(\theta)$ soit une matrice de type n.

On revient au cas général avec $p \geqslant 3$.

3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type n.

3.1. Établir l'égalité : $A^{n^2} = A$.

3.2. On note $B = A^{n+1}$.

3.2.1. Montrer que $B^n = B$.

3.2.2. Démontrer que B est une matrice symétrique.

3.2.3. Prouver que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.
On pourra examiner $X^\top BX$ où X est un vecteur bien choisi de E.

3.2.4. Déterminer les valeurs propres de la matrice B, lorsque B n'est ni la matrice nulle ni la matrice identité.

3.2.5. Prouver que B est une matrice de projection orthogonale.
On précisera ses éléments caractéristiques.

3.3. Prouver que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.

3.4. Démontrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

3.5. Prouver que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3.6. Démontrer que l'on a : $\forall\, X \in \mathrm{Im}(A),\ \|AX\| = \|X\|$.

3.7. Prouver que si A est de plus inversible, alors A est aussi de type -1.

4. Prouver enfin que si A est à la fois de type n et de type $n+1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.

EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

Questions de cours

1. Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

3.1. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\, a_n$ converge.

3.2. Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant p}(-1)^n\, a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p.

3.3. Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

3.4. Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

*****

5. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que si φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{i}\,\varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$.

5.1. Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé.

5.2. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$F'(x) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u.$$

6. Convergence d'intégrales

6.1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ convergent.

6.2. En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge.

6.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge.

6.4. Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}v^2}\, \mathrm{d}v$ converge.

On pourra effectuer un changement de variable.

7. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u$.

7.1. Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

7.2. On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n w_n$.

Prouver que α_n est un réel strictement positif.

On pourra effectuer sur w_n le changement de variable affine $t = u - n\pi$.

7.3. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7.4. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.

On pourra utiliser les questions de cours.

7.5. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u$.

8. Montrer que pour tout x réel positif :

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\, \mathrm{d}u\right)^2.$$

9. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

On pourra utiliser la question **6**.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1145 – D'après documents fournis