Calcul différentiel

1 Des dérivées dans tous les sens

Exercice 1 – *Mines [3/10]*
Calculer $g''(0)$, où $g(x) = f(0,x) + f(x,x^2)$, avec $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Exercice 2 – *Classique [8/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit $g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner son gradient en (x,y)
On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégrul, pour obtenir une expression intégrale simple de $g(x,y)$.

Exercice 3 – *À valeurs complexes [5/10]*
Soit f une fonction dérivable de f de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $t \mapsto |f(t)|$ est croissante si et seulement si pour tout $t \in I$, la partie réelle de $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ est dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 – *Dans le groupe orthogonal [3/10]*
Soient n un entier impair, et f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 – *Et pour les matrices symétriques [7/10]*
Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (matrices symétriques à spectre dans $\mathbb{R}^+$) telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{tr}\,(M'(t)) \leqslant -\mathrm{tr}\,(M(t))\,.$$

Montrer : $M(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Indication : considérer $\varphi : t \mapsto \mathrm{tr}(M(t))$... on pourra commencer par traiter le cas où φ s'annule.

2 Équations aux dérivées partielles

Exercice 6 – *IMT 2017 [4/10]*
Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On pourra poser $\begin{cases} x = 2u + v \\ y = 3u \end{cases}$

Exercice 7 – *Changement de variable linéaire [5/10]*
Soient α, β deux réels non nuls. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Exercice 8 – *Centrale PC 2016 [5/10]*
Résoudre
$$\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
en posant $(u,v) = (x, y\mathrm{e}^{x^2/2})$.

Exercice 9 – *Mines 2015 [8/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

1. Montrer que l'application
$$g : (x,y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,0)dt$$
est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et vérifie :
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}.$$
2. On définit sur $\mathbb{R}^+$ l'application $\Phi : r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$.
Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer sa dérivée.
3. En déduire que si f possède un extremum local en 0 (ou ailleurs), alors f est localement constante.

3 Extrema, points critiques

Exercice 10 – *Centrale 2018 [8/10]*
On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = (x^2+2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

1. (a) Déterminer les points critiques de f.
(b) Déterminer les bornes inférieure et supérieure de f sur $\mathbb{R}^2$.
Dans la suite, on prend E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E, et on définit
$$\varphi : x \in E \longmapsto \langle u(x)|x\rangle \mathrm{e}^{-\|x\|^2}.$$
2. Déterminer les bornes inférieure et supérieure de φ sur E.

Exercice 11 – *CCP 2017 [4/10]*
On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = x^2y + \ln(4+y^2)$.

1. Montrer qu'il existe un unique point critique.
2. Évaluer f sur des droites passant par ce point : la restriction de f à ces droites y possède-t-elle un extremum ?
3. On pose $e(x) = f(x,x^3) - f(0,0)$. Trouver un équivalent simple de e en 0.
4. Est-ce que f possède des extrema locaux ?
5. f est-elle bornée ?

Exercice 12 – *Regarder dans les bonnes directions [5/10]*
Déterminer les points critiques et extrema locaux/globaux de l'application
$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1.$$

Exercice 13 – *CCP 2011 [7/10]*
On définit $f : (x,y) \mapsto \sin x \sin y \cos(x+y)$ sur
$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 ;\ x+y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

1. Extrema de f sur Δ ?
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $x + y + z = \frac{\pi}{2}\cdot$ Montrer : $\sin x \sin y \sin z \leqslant \frac{1}{8}\cdot$
   NDLR : sans les fonctions de plusieurs variables mais avec la concavité de $\ln \circ \sin$*, on doit pouvoir s'en sortir également.*

Exercice 14 – *IMT 2016 [5/10]*
On considère l'application

$$f : (x, y \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

1. Étudier les extrema locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
   Dans la suite, on note :

$$D = \{(x, y \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

2. Représenter D.
3. Étudier les extrema locaux et globaux de f sur D.

Exercice 15 – *Mines 2015 [7/10]*
Étudier les extrema de

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto x^y - xy$$

Exercice 16 – *Mines 2016 [7/10]*
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives, $B \in \mathbb{R}^n$, $q : X \in \mathbb{R}^n \mapsto {}^tXAX$ et $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto q(X) - 2{}^tBX$.

1. Calculer le gradient de f.
2. Montrer que f possède un minimum, et le calculer.

4 Courbes et surfaces : aspects différentiels

Exercice 17 – *CCP 2011 [4/10]*
Montrer que l'équation $x \ln y + y \ln x = \ln 2$ définit localement une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(1, 2)$. Donner la tangente en ce point.

Exercice 18 – *Plans tangents contenant une droite [8/10]*
Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $2x^2 + 3yz - 4z = 1$. Trouver les plans tangents à $\mathcal{S}$ contenant la droite d'équations

$$\begin{cases} y = 2 \\ 4x = z \end{cases}$$

Exercice 19 – *Plans tangents parallèles à une droite [8/10]*
Soient $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ et D la droite d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$
Déterminer les points M de $\mathcal{S}$ tels que le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M est parallèle à D.

Exercice 20 – *CCP 2015 [7/10]*
On définit (Σ) par l'équation $xyz = 1$.

1. Montrer que (Σ) est une surface régulière.
2. Montrer que pour tout plan tangent à (Σ), le tétraèdre formé par ce plan et les trois plans engendrés par les vecteurs de base a un volume constant (indépendant du plan tangent).
   La formule $V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$ *donnant le volume d'un tétraèdre était donnée.*

3. Étudier l'intersection de (Σ) avec les plans d'équations respectives $z = z_0$, $x = 1$ et $x = -1$; en déduire l'allure de (Σ).

Exercice 21 – *St-Cyr 2017 [3/10]*
Soit $f : (x, y, z) \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xyz)}{1 + (xyz)^3}\cdot$ Donner l'équation du plan tangent en $(1, 1, 1)$ à la surface d'équation $f(x, y, z) = \dfrac{\pi}{8}\cdot$

Exercice 22 – *Centrale 2017 [5/10]*
Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{y}{1 + x^2} & \text{si } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$? Déterminer ses lignes de niveau.
2. On considère une droite D_α de $\mathbb{R}^2$ de pente α et passant par $(1, 1)$. Soient S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$ et C la courbe tracée sur S et dont la projection orthogonale sur le plan $z = 0$ est D_α (NDLR : non, pas exactement...).
Soit M un point de C. Déterminer la tangente à C en M

5 Indications

Exercice 1 – $g''(0) = \Delta f(0, 0) + 2\partial_2 f(0, 0)$.

Exercice 2 – Comme indiqué, on écrit $g(x, y) = \displaystyle\int_0^1 f'(x + (y - x)u)du$...

Exercice 3 – Si $f = a + bi$, alors $|f|' = 2(aa' + bb')$ et $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{(a' + ib')(a - bi)}{|f|^2}\cdots$ En passant par $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, on doit pouvoir s'en sortir de façon plus élégante !

Exercice 4 – ${}^t(\varphi'(t))\varphi(t) = -{}^t(\varphi(t))\varphi'(t)$; puis je regarde le déterminant...

Exercice 5 – Les traces sont toutes positives, donc $\varphi : t \mapsto \operatorname{tr}(M(t))$ est décroissante, puis nulle à partir de t_0 si elle s'annule en t_0. Sinon son logarithme existe et a une dérivée majorée par -1 donc est majoré sur $\mathbb{R}^+$ par $K - t$ pour un certain K. Bref : la trace tend vers 0. Ensuite, chaque valeur propre tend vers 0 (elles sont majorées par la trace), et en particulier la plus grande $\lambda(t)$, qui est telle que $\|u(x)\| \leqslant \lambda(t)\,\|x\|$...
On peut aussi conclure en orthodiagonalisant et en considérant une norme adéquate sur les matrices.

Exercice 6 – La fonction $g : (u, v) \mapsto f(2u + v, 3v)$ vérifie $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ si et seulement si f est solution de l'équation initiale, ce qui est équivalent à l'existence d'une application φ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = \varphi(v)$. Mais à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on doit certainement pouvoir trouver (u, v) tels que $f(x, y) = g(u, v)$, non ?

Exercice 7 – $(x, y) = (\alpha u, \beta u + v)$, puis $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2\alpha} - \varphi(\alpha y - \beta x)$, où $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8 – En posant $g(u, v) = f(x, y) = f(u, ve^{-u^2/2})$ on obtient nécessairement (si on est dans une analyse) $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$, puis $g(u, v) = \varphi(v)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et enfin :

$$f(x, y) = g(u, v) = g(x, ye^{x^2/2}) = \varphi(ye^{x^2/2})$$

et la synthèse est aisée.
On peut aussi placer des équivalences, pour peu qu'on ait avant précisé que le changement de variable proposé était bijectif puis en faisant très attention à la quantification. Mais est-ce vraiment pertinent ?

Exercice 9 – Dans la première question, pour bien appliquer les théorèmes de première et deuxième année, il pourra être intéressant de renommer soigneusement certaines fonctions, et bien fixer les objets qui doivent l'être. On obtient ensuite $\Phi'(r) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{d}{d\theta}\left(g(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) d\theta = 0$. Si f est localement maximale en 0, alors comme Φ est constante égale à $2\pi f(0)$ (limite de Φ en 0^+ ; passer par $\Phi(1/n)$ en cas d'états d'âme), la fonction $\theta \mapsto f(r_0\cos\theta, r_0\sin\theta)$ est en fait constante égale à $f(0)$.

Exercice 10 – Joli exercice ! Pour f on trouve 5 points critiques $(0,0, (0,\pm 1)$ et $(\pm\sqrt{2}, 0)$ Puisque $f(x,y)$ tend vers 0 lorsque $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$ (point intéressant à détailler !) on est assuré d'un maximum pris en un point critique ; c'est donc $f(0,1) = 2\mathrm{e}^{-1}$.
Pour φ, il convient évidemment de se placer dans une base orthonormée de diagonalisation dans laquelle on a essentiellement : $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right) \mathrm{e}^{-\sum x_i^2}$.
Outre $(0,0)$, les points critiques sont les x pour lesquels il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$, $\sum \lambda_i x_i^2 = \lambda_{i_0}$, et $x_i = 0$... pour tout i tel que $x_{i_0} \neq 0$ (attention aux valeurs propres multiples !) ; ces points sont donc des vecteurs propres. Il reste à maximiser $\lambda_i \|x\| \mathrm{e}^{-\|x\|^2}$, et on trouvera $\lambda \mathrm{e}^{-1}$, avec λ la plus grande valeur propre de u.

Exercice 11 – $f(t, pt) = f(0,0) + \dfrac{p^2}{4} t^2 + o(t^2)$ est effectivement minimale en 0, mais $f(t, t^3) = f(0,0) + t^5 + o(t^5)$ « traverse » $f(0,0)$. Ainsi, il n'y a pas d'extrema locaux. En regardant $f(t,t)$ on voit également que f n'est ni majorée ni minorée.

Exercice 12 – Les cinq points critiques sont $(0,0)$ et $(\pm 1, \pm 1)$ (quatre sont donc symétriques). Au voisinage de 0 : $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 - r^2 + \frac{r^4}{4}\sin(2\theta) \geqslant 1 - r^2 + r^4 \leqslant 1$ pour $r \leqslant 1$ donc f possède un maximum local en $(0,0)$. Ensuite, $f(1+u, 1+v) = 4uv+$ des termes d'ordre 3. Le terme quadratique est parfois positif et parfois négatif... ce qui nous incite à regarder $f(1+u, 1+u)$ puis $f(1+u, 1-u)$ et détecter ainsi un point selle.

Exercice 13 – La fonction en jeu est positive, et nulle sur les bords, ce qui nous donne un minimum global. À l'intérieur, la fonction est strictement positive, de classe $\mathcal{C}^1$ et possède un unique point critique...

Exercice 14 – On pourra noter que $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 5$! Sur $\overset{\circ}{D}$, f ne possède pas de point critique, donc sur D, les extrema (dont l'existence est assurée car f est continue et D est fermé borné en dimension finie) sont pris sur les bords...

Exercice 15 – Le seul point critique est $(\mathrm{e}, 1)$. J'ai regardé ce qui se passait au voisinage de ce point sur une droite de pente p et ai trouvé (calcul vérifié ensuite avec Maple) : $f(\mathrm{e}+t, 1+pt) \sim \left(p + \dfrac{\mathrm{e}p^2}{2}\right) t^2$, ce qui nous permet de choisir p pour que cette quantité puisse être localement positive... mais aussi localement négative pour d'autres valeurs de p. Finalement, ce n'est pas un extremum local.

Exercice 16 – $\nabla f(X) = 2(AX - B)$ et si on note $X_0 = A^{-1}B$ l'unique point critique, alors :

$$f(X_0 + Y) = f(X_0) + {}^t\!YAY \geqslant f(X_0) = -{}^t\!BA^{-1}B$$

(et c'est confirmé dans le cas trivial $n = 1$).

Exercice 17 – $2(2 + \ln 2)(x-1) + (y-2) = 0$.

Exercice 18 – On a $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{d} \subset \Pi_{M_0}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM_0} \perp \nabla f(M_0)$ et $\overrightarrow{d} \perp \nabla f(M_0)$.
En n'oubliant pas que $M_0 \in \mathcal{S}$, on obtient finalement deux plans ; les points de $\mathcal{S}$ correspondants étant d'abscisse 1 et $-1/2$ (et d'ordonnée 1).

Exercice 19 – Cette fois, la condition de parallélisme se traduit en la nullité d'un seul produit scalaire, ce qui laisse à la fin un degré de liberté. Je trouve finalement comme points les

$$\left\{\left(-2y, y, \pm\sqrt{3y^2 - 1}\right) \;\middle|\; |y| \geqslant 1/\sqrt{3}\right\}$$

Exercice 20 – On peut s'entraîner avec la version dans $\mathbb{R}^2$! L'application $\Phi : (x, y, z) \mapsto xyz - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et lorsque $\Phi(x, y, z) = 0$, on a $\nabla\Phi(x, y, z) \neq \overrightarrow{0}$, donc (Σ) est une surface régulière. En (x_0, y_0, y_0), le plan tangent a pour vecteur normal $\nabla\Phi(x_0, y_0, z_0)$, ce qui nous donne une équation normale de ce plan : $y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z = K$, constante évaluée en (x_0, y_0, z_0) (donc égale à 3). Les intersections recherchées ont donc pour coordonnées $(3x_0, 0, 0)$, ... et finalement, le tétraèdre recherché a pour volume $\dfrac{27x_0y_0z_0}{6} = \dfrac{9}{2}$.

Exercice 21 – Le calcul peut faire peur, mais en fait les trois dérivées partielles en $(1, 1, 1)$ sont évidemment égales (et non nulle, on s'en convainc rapidement) donc la surface possède un plan tangent d'équation $x + y + z = K = 3$.

Exercice 22 – Iil ne faut pas se laisser impressionner par l'énoncé ! Déjà, f est continue d'après les théorèmes usuels (compositions, projections...). Par contre, $y \mapsto f(x_0, y)$ n'est pas dérivable en 0, donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En revanche, elle l'est sur $\mathbb{R}^2$ privé de la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$.
Les lignes de niveau sont les ensembles définis par l'équation $f(x, y) = K$. Pour $K < 0$ c'est vide. Pour $K = 0$ c'est une droite. Et pour $K > 0$ il s'agit de la parabole d'équation $y = K(1 + x^2)$.
Enfin, la courbe C est tout bêtement paramétrée par : $\left(1 + t, 1 + \alpha t, \dfrac{1 + \alpha t}{1 + t^2}\right)$ (enfin, dans la zone où $1 + \alpha t \geqslant 0$), ce qui donne facilement un vecteur directeur de la tangente en dérivant par rapport au paramètre t. What else ?