Khôlles : quinzaine numéro 9

Du 4 au 15 mars 2024

Pour les quatre dernières semaines, les collés peuvent dire qu'ils ne souhaitent pas de question de cours : cela ne doit pas influencer la suite de la colle (ni la note). Ils doivent néanmoins évidemment connaître et savoir appliquer précisément les théorèmes !

1 Première semaine : préhilbertiens

— Toutes les généralités sur les euclidiens, avec en particulier les concepts de projections orthogonales, et les calculs de distance, qui doivent faire l'objet d'une géométrisation autonome, et d'un dessin.
— Automorphismes orthogonaux ; lien avec les matrices orthogonales. Habitants de $SO_2(\mathbb{R})$ puis $SO(E)$ puis $O(E)$ en dimension 2. Habitants de $SO(E)$ en dimension 3. Identification précise des rotations en dimension 3.
— Endomorphismes autoadjoints : théorème spectral sans E à la fin (géométrique et matriciel). Endomorphismes et matrices symétriques (défini(e)s) positif(ve)s (à partir du mardi 5).

2 Deuxième semaine : autoadjoints et ÉDL

— Encore un peu d'endomorphismes symétriques.
— Pour les équations différentielles linéaires, il y a les rappels du cours de première année (structure des espaces de solution – vectoriel ou affine – équations linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 à coefficients constants). La seule nouveauté est le théorème de Cauchy pour les équations scalaires d'ordre 2 à coefficients continus : $y'' = ay' + by + c$ possède une unique solution à conditions initiales en $y(t_0)$ et $y'(t_0)$ imposées (a, b et c sont continues sur un intervalle I).
— À partir du mardi 12 : problèmes de recollement. Et on peut aussi redonner des systèmes différentiels linéaires, histoire de faire un peu de réduction.

3 Questions de cours

— (S1) Inégalité de Cauchy-Schwarz ; cas d'égalité.
— (S1) Existence d'une base orthonormée en dimension finie. Par récurrence (soigneuse) ou par orthonormalisation.
— (S1+S2) Un endomorphisme d'un espace préhibertien préserve la norme si et seulement s'il préserve le produit scalaire.
— (S1+S2) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ envoie une base orthonormée sur une base orthonormée, alors c'est une isométrie.
— (S2) Si $u \in \mathcal{S}_E$ a ses valeurs propres positives, alors il existe $v \in \mathcal{S}_E$ dont les valeurs propres sont positives et tel que $v^2 = u$.
— (S2) Méthode de la variation de la constante pour prouver que si a et b sont continues sur I, alors l'équation $y' = ay + b$ possède au moins une solution.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : espaces vectoriels normés, calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$.