Centrale TSI 2023 - Maths 1

Quelques notes sur ce qui est attendu.

1 Question préliminaire

Q 1. Intégrer par parties sur un segment, et rédiger proprement une implication ; signaler que l'autre est identique. (Mais ne pas pipeauter sur une équivalence)

2 Transformée de Laplace, généralités

Q 2. La convergence absolue implique la convergence tout court.

Q 3. Difficile de placer le bon niveau de rédaction au delà de « par linéarité de l'intégration ». Peut-être glisser un « les deux fonctions en jeu sont intégrables... »

Q 4. Après avoir fixé $p > 0$ (DONC NE PAS AVOIR ÉCRIT « $\forall p$ »), une certaine fonction est continue sur $[0, +\infty[$ (la correction s'arrête à nouveau si vous ne commencez pas par ça) et est un $o(1/t^2)$ en $+\infty$, pour changer.
Il n'est évidemment pas question de majorer une intégrale pour justifier son existence, bien entendu...

Q 5. Pour ce premier calcul, passer par $\displaystyle\int_0^T \mathrm{e}^{-pt}dt$, et trouver finalement :

$$\boxed{F_0(p) = \frac{1}{p}\cdot}$$

Les calculs suivants pourront être faits directement sur $[0, +\infty[$ *quand les limites sont très claires.*

Q 6. Soit on utilise le théorème de la question préliminaire (qui nécessite de vérifier les hypothèses !) soit on repasse par $[0, T]$ avant de dire que tous les termes convergent...

$$\boxed{\text{Pour tout } p > 0,\ F_n(p) = \frac{n}{p}F_{n-1}(p)}$$

Q 7. Hors de question de ne pas rédiger soigneusement. Ce qui nécessite à la fois des guillemets, et l'interdiction du « pour tout n » bien évidemment dedans la proposition, mais même après, par prudence. Mais bien entendu vous savez maintenant comment rédiger les récurrences... [1] Il était conseillé de FIXER p avant de déclencher la récurrence, plutôt que d'inclure le « $\forall p$ » dans ladite récurrence.

Q 8. Une certaine fonction est continue sur $[0, +\infty[$ (la correction s'arrête si vous ne commencez pas par ça) et est un $o(1/t^2)$ en $+\infty$ donc intégrable au voisinage de $+\infty$.
Après avoir découvert le cercle trigonométrique à un moment de sa scolarité entre le début de la terminale et le début de sa spé, on sait ce que vaut le module de $\mathrm{e}^{i\theta}$.
En passant (ça resteprudent à mon avis) par le segment $[0, T]$ on trouvera :

$$\boxed{\text{Pour tout } p > 0,\ F_{a,b}(p) = \mathcal{L}(f_{a,b}) = \frac{1}{a+p-bi}\cdot}$$

Q 9. Quand une fonction complexe est intégrable, alors sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont aussi, les intégrales étant ce qu'on imagine. Ainsi :

1. Quinte de toux grasse et sonore.

$$\boxed{\text{Pour tout } p>0,\ G_{a,p}(p)=\frac{a+p}{(a+p)^2+b^2} \text{ et } H_{a,b}(p)=\frac{b}{(a+p)^2+b^2}.}$$

Q 10. Quel suspens sur la méthode à employer pour montrer une intégrabilité...

Q 11. L'application $t\mapsto \mathrm{e}^t$ doit faire le job puisque $t\mapsto \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t/2}$ n'est pas trop intégrable sur $[0,+\infty[$ (si vous ne voyez pas pourquoi ce n'est pas bon signe).
Pourquoi prendre un exemple où un mystérieux p intervient ?

Q 12. La question préliminaire doit s'appliquer, je dirais : la partie intégrée (le crochet) fournissant le « $-f(0)$ ».

Q 13. On applique le résultat précédent à f' (qui est $\mathcal{C}^1$, donc on peut)... puis une deuxième fois à f !

3 Approximation de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment par des fonctions polynômiales

Q 14. B_n^k est évidemment de degré $k+(n-k)=n$.

Q 15. Binôme de Newton : $\sum\limits_{k=0}^{n} B_n^k=1$.

Q 16. Revenir à la définition de l'espérance, qui est une somme... ici finie donc sans états d'âme à avoir. Ensuite, $\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y-X)\geqslant 0$ puisque $Y-X\geqslant 0$.

Q 17. $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)$ (aucun problème d'existence ici puisque la variable aléatoire prend un nombre fini de valeurs). On développe ensuite le carré, puis linéarité de l'espérance.

Q 18. $\mathbb{V}(X)$ est positive par définition, donc $\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2\geqslant 0$, puis croissance de $\sqrt{\cdot}$.

Q 19. $\mathbb{E}(S_n)=nt$ et $\mathbb{V}(S_n)=nt(1-t)$.

Q 20. Linéarité de l'espérance, et

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n}-t\right)^2\right)=\underbrace{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}-t\right)}_{=\mathbb{V}(S_n)/n^2}+\underbrace{\left(\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n}-t\right)^2\right)\right)^2}_{=0}=\frac{nt(1-t)}{n^2}=\frac{t(1-t)}{n}.$$

Q 21. Inégalité des accroissements finis : φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et en notant $M_\varphi=\|\varphi'\|_\infty$ (existence acquise par la continuité de φ' sur un segment) on a $|\varphi'(t)|\leqslant M_\varphi$ pour tout $t\in[0,1]$.

Q 22. Puzzle...et l'ordre est donné ! $|\mathbb{E}(X_n)|\leqslant\sqrt{\mathbb{E}(x_n^2)}$ d'après Q 18. Mais d'après la question 21 (et une mise au carré) :

$$|X_n|^2=\left|\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)-\varphi(t)\right|\leqslant M_\varphi^2\left|\frac{S_n}{n}-t\right|^2$$

donc en utilisant la croissance de l'espérance (Q 16) :

$$\mathbb{E}(X_n)^2\leqslant M_\varphi^2\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n}-t\right|^2\right)=M_\varphi^2\frac{t(1-t)}{n}$$

Q 23. Théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X_n)=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\mathbb{P}(S_n=k)}_{=B_n^k(t)}\varphi(k/n)$$

Q 24. On doit pouvoir dessiner tout de suite son allure : le maximum est pris en $1/2$ et vaut $1/4$. Sinon comme au vingtième siècle :

$$t(1-t)=-t^2+t=-(t-1/2)^2+1/4$$

Q 25. Si on prend pour $n\in\mathbb{N}$: $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)B_n^k$, alors chaque P_n est un polynôme, et

$$\|\varphi-P_n\|_\infty\leqslant\frac{M_\varphi}{2\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

4 Injectivité de la transformation de Laplace et applications

Q 26. Théorème fondamental de l'analyse. $g'(t) = f(t)\mathrm{e}^{-t}$.

Q 27. g est continue sur $[0, +\infty[$ et possède une limite finie en $+\infty$ « donc est bornée ». Je pense qu'il conviendrait de prouver ce résultat à la limite extérieure du programme : si on note ℓ la limite de g en $+\infty$, alors $|g(t)| \leqslant |\ell| + 1$ pour $t \geqslant T_0$, puis g est continue sur le fermé borné $[0, T_0]$.

Q 28. g est continue et bornée donc dans E (Q 10). Ensuite, intégration par parties.

Q 29. Continue sur $]0, 1]$ par composition $]0, 1] \to [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et en 0 par composition de limites.

Q 30. Si on applique le théorème de changement de variable sur $[0, +\infty[$, alors il faut parler de bijection $\mathcal{C}^1$ (strictement décroissante, accessoirement), et préciser que l'une des intégrales (au départ ou à l'arrivée) est convergente.

Q 31. Déjà, $\displaystyle\int_0^1 \varphi(u)u^n du = \mathcal{L}(g)(n+1) = \frac{1}{n+1}\mathcal{L}(f)(n+2) = 0$ puisque $\mathcal{L}(f) = 0$. Le passage de X^n à tout polynôme P se fait bien entendu par linéarité... de tout !

Q 32. On prend (P_n) approchant uniformément la fonction continue φ sur $[0, 1]$. On a alors

$$\left|\int_0^1 P_n\varphi - \int_0^1 \varphi^2\right| = \left|\int_0^1 (P_n\varphi - \varphi^2)\right| \leqslant \int_0^1 \underbrace{\left|P_n\varphi - \varphi^2\right|(t)}_{\leqslant \|P_n\varphi-\varphi^2\|_\infty} dt \leqslant \left\|P_n\varphi - \varphi^2\right\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty \|P_n - \varphi\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Q 33. Puisque chaque $\displaystyle\int_0^1 P_n\varphi$ est nulle, on obtient également $\displaystyle\int_0^1 \varphi^2 = 0$. Pour que l'intégrale de cette fonction continue posisitive soit nulle, il faut que φ soit uniformément nulle, donc g est nulle sur $[0, +\infty[$, et on dérivant on obtient ce qu'on veut.

Q 34. On vient de montrer que le noyau de l'application linéaire $\mathcal{L}$ était réduit à $\{0\}$.

Q 35. Pour avoir $(2a)t + (2a + 2b) = t + 1$ pour tout t il est nécessaire (certes, mais pourquoi ? Et surtout on s'en fiche) mais aussi suffisant (ce qui nous intéresse, et est évident) d'avoir $a = 1/2$ et $b = 0$.

Q 36. On dipose d'une solution particulière, et l'équation homégène a pour équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, soit encore $(\lambda+1)^2 = -1$, soit encore $\lambda = -1 \pm i$. On en déduit les solution de l'éqution homogène, puis par superposition les solutions générales : $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}(A\cos t + B\sin t) + t/2 - 1/2$. Les conditions en 0 donnent comme unique solution au problème de Cauchy : $y(t) = \dfrac{\sin(t)\mathrm{e}^{-t} + t}{2}\cdot$

Q 37. On applique $\mathcal{L}$ à l'équation vérifiée par y en utilisant les questions 12 et 13, ainsi que les conditions initiales.

Q 38. On peut constater que $a = b = 1/2$ conviennent. Attention, il ne s'agit pas d'une décomposition en élément simple au sens usuel ; beaucoup d'arnaques/confusions attendues, donc !

Q 39. Injectivité de $\mathcal{L}$ après avoir constaté que $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(t)\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)$ d'après les questions 7 et 9.

Q 40. Bof...

Q 41. $\chi_A = (X+1)(X+4)$ est scindé à racines simples ; on trouve facilement une base de vecteurs propres, et si on fuit les fractions (ce qui est toujours prudent), on prendra probablement : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Q 42. Le système initial est équivalent à $U' = DU$, ou encore à l'existence de A, B tels que $u(t) = A\mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = B\mathrm{e}^{-4t}$. Les conditions initiales sur x et y sont équivalentes (inversibilité de P) à des conditions initiales sur u et v, et finalement : $x(t) = -\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-4t}$ et $y(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-4t}$.

Q 43. On applique $\mathcal{L}$, on utilise la question 12 et on résout un système $(2, 2)$.

Q 44. Décomposition en éléments simples standard, cette fois :

$$\mathcal{L}(x)(p) = -\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+4} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(y)(p) = -\frac{1}{p+1} + \frac{2}{p+4}\cdot$$

Q 45. Comme à la question 39, on voit $\mathcal{L}(x)$ et $\mathcal{L}(y)$ comme les transformées de Laplace de fonctions connues, et on utilise l'injectivité de $\mathcal{L}$. On retrouve vien les mêmes expressions.

Q 46. Simples vérifications. Bref, la « méthode de Laplace pour les EDL » est une usine à gaz, mais marche !