Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ p_{ij} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.

3. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

5. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y = i]).$$

Calculer les b_{ij}.

6. Déterminer $\mathbf{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(B)$.

7. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.

8. Démontrer que $B^2 = \mathbf{tr}\,(B)\,B$.

9. Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{n+1} - 1$ par $X - 1$.

2. Donner, sans justification, la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ ainsi que son ensemble de définition.

*****

3. Étude d'une suite

3.1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

3.2. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t + \cdots + t^n}\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

4. **Étude de la série de terme général** $u_n - \ell$

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul p, et tout réel $t \in [0,1]$, on pose $g_p(t) = (1-t)\, t^{p(n+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p \geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.

4.2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.

4.3. En utilisant la série de fonctions définie au **4.1**, démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)\,((n+1)p+1)}.$$

4.4. Pour tout p entier naturel non nul, on pose $h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)\,((t+1)p+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

4.5. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On admettra que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE 3

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et on rappelle que :

$$\forall\, (M,N) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2, \quad (M\,N)^\top = N^\top\, M^\top.$$

L'espace $E = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall\, (X,Y) \in E^2\,, \quad (X|Y) = X^\top\, Y$$

et pour tout vecteur X de E , sa norme est notée

$$||X|| = \sqrt{X^\top X}.$$

Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1.

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est de type n lorsque $A^\top = A^n$.

1. **Quelques exemples**

1.1. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 0.

1.2. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1.

1.3. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type -1.

En donner un exemple différent de la matrice identité lorsque $p = 4$.

On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 2.

2. **Dans cette question et uniquement dans cette question**, on prend $p = 3$ et pour tout réel θ, on note :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2.1. Démontrer que l'on a : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ (A(\theta))^m = A(m\,\theta)$.

2.2. Déterminer alors l'ensemble des réels θ tels que $A(\theta)$ soit une matrice de type n.

On revient au cas général avec $p \geqslant 3$.

3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type n.

3.1. Établir l'égalité : $A^{n^2} = A$.

3.2. On note $B = A^{n+1}$.

3.2.1. Montrer que $B^n = B$.

3.2.2. Démontrer que B est une matrice symétrique.

3.2.3. Prouver que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.
On pourra examiner $X^\top BX$ où X est un vecteur bien choisi de E.

3.2.4. Déterminer les valeurs propres de la matrice B, lorsque B n'est ni la matrice nulle ni la matrice identité.

3.2.5. Prouver que B est une matrice de projection orthogonale.
On précisera ses éléments caractéristiques.

3.3. Prouver que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.

3.4. Démontrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

3.5. Prouver que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3.6. Démontrer que l'on a : $\forall\, X \in \mathrm{Im}(A),\ \|AX\| = \|X\|$.

3.7. Prouver que si A est de plus inversible, alors A est aussi de type -1.

4. Prouver enfin que si A est à la fois de type n et de type $n+1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.

EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

Questions de cours

1. Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

3.1. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge.

3.2. Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant p}(-1)^n a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p.

3.3. Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

3.4. Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

*****

5. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que si φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{i}\,\varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$.

5.1. Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé.

5.2. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$F'(x) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u.$$

6. Convergence d'intégrales

6.1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ convergent.

6.2. En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge.

6.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\, du$ converge.

6.4. Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\, dv$ converge.

On pourra effectuer un changement de variable.

7. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$.

7.1. Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

7.2. On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n w_n$.

Prouver que α_n est un réel strictement positif.

On pourra effectuer sur w_n le changement de variable affine $t = u - n\pi$.

7.3. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7.4. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.

On pourra utiliser les questions de cours.

7.5. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$.

8. Montrer que pour tout x réel positif :

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\, du\right)^2.$$

9. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

On pourra utiliser la question **6**.

Éléments de correction

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ p_{ij} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} p_{ij} = 1$ ce qui équivaut à $\alpha = 2^{-2n}$.

2. La formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $([Y = j])_{j\in[\![1,n+1]\!]}$ permet d'obtenir les lois marginales :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \mathbb{P}([X = i]) = \sum_{j\in[\![1,n+1]\!]} \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = 2^{-n}\binom{n}{i-1}.$$

Il en va de même pour la loi de Y par symétrie.

3. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i])\,\mathbb{P}([Y = j])$ et donc, les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

4. On considère la variable aléatoire $Z = X - 1$, alors $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout i de $[\![0, n]\!]$, on a $\mathbb{P}([Z = i]) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}$. Z suit donc une loi binomiale de paramètre $p = \frac{1}{2}$, son espérance est $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$ et par linéarité de l'espérance, on en déduit $\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{n}{2}$.

La variance de Z et de X est alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$.

5. On a : $b_{ij} = \dfrac{\mathbb{P}([Y = i] \cap [X = j])}{\mathbb{P}([X = j])} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{i-1}$.

On en déduit que les colonnes de B sont toutes identiques à $C = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

6. La matrice B est donc de rang 1 : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect}(C)$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension n : c'est donc l'hyperplan de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ qui a pour équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 0$.

7. On a $B = CL$ avec $L = (1, 1, \ldots, 1)$.

8. Calculer B^2.

En utilisant le cours, le terme générique de B^2 est $\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{n}{i-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{i}$.

On en déduit que $B^2 = B$.

Or $\operatorname{tr}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} b_{ii} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbb{P}([X = i]) = 1$, on a donc bien $B^2 = \operatorname{tr}(B)B$.

9. On déduit de ce qui précède que la matrice B est la matrice d'un projecteur d'un espace de dimension $n + 1$.

Ses valeurs propres sont 0 (d'ordre n) et 1 d'ordre 1.

La matrice B est diagonalisable.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. L'identité de Bernoulli permet d'écrire :

$$X^{n+1} - 1 = (X - 1)\left(1 + X + X^2 + \ldots + X^n\right)$$

Le reste de la division est nul et le quotient est le polynôme : $1 + X + X^2 + \ldots + X^n$.

2. Pour tout réel x de $]-1, 1[$, on a : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

* * * * * *

3. Étude d'une suite.

3.1. Soit n un entier naturel, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$ est continue sur $[0, 1[$ et prolongeable par continuité en 1 :

$$\lim_{t\to 1} \frac{1-t}{1-t^{n+1}} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{1+t+\ldots+t^n} = \frac{1}{n+1}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ converge.

3.2. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

On a :

$$0 \leqslant u_n - \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}$$

La suite u converge vers $\ell = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Autre méthode. Posons $f_n(t) = \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I = [0,1[$. Pour tout n, f_n est continue (par morceaux) et la suite (f_n) converge (simplement) vers $f : t \mapsto 1-t$ qui est continue par morceaux. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) = 1$$

Et φ est une fonction (continue par morceaux) intégrable sur I. Donc les f_n sont intégrables sur I (on le sait déjà) ainsi que f et :

$$\lim u_n = \lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \frac{1}{2}$$

4. Étude de la série de terme général $u_n - \ell$

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul p, et tout réel $t \in [0,1]$, on pose $g_p(t) = (1-t)\,t^{p(n+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.

La série $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p(1)$ converge (clairement) vers 0.

Pour $t \in [0,1[$, la série géométrique $\sum\limits_{p\geqslant 1} t^{p(n+1)}$ converge vers $\dfrac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}$.

La série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ converge (simplement) sur $[0,1]$ vers g définie par :

$$g(t) = \frac{(1-t)t^{n+1}}{1-t^{n+1}} \text{ si } t \in [0,1[\quad \text{et } g(1) = 0$$

4.2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.

$$\int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p(n+1)+1} - \frac{1}{p(n+1)+2} = \frac{1}{(p(n+1)+2)\,(p(n+1)+1)} \sim \frac{1}{(n+1)^2p^2}$$

4.3. En utilisant la série de fonctions définie au **4.1** démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)\,((n+1)p+1)}.$$

D'après ce qui précède :

$$u_n - \ell = u_n - \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $p \geqslant 1$, la fonction g_p est continue (par morceaux) sur $I = [0,1[$ intégrable (g_p est continue sur $[0,1]$ (et positive !)) de plus :

$$\int_0^1 |g_p| \sim \frac{1}{(n+1)^2 p^2}$$

Or $\sum_p \frac{1}{(n+1)^2 p^2}$ est une série (à termes positifs) convergente donc la série $\sum_p \int_0^1 |g_p|$ converge.
D'après le théorème de convergence terme à terme :

$$u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)\,((n+1)p+1)}$$

4.4. Pour tout p entier naturel, on pose $h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)\,((t+1)p+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $t \geqslant 0$:

$$0 \leqslant h_p(t) \leqslant \frac{t^2}{(t+1)^2 p^2} \leqslant \frac{1}{p^2}$$

La série $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

4.5. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On admettra que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La série $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{+\infty} h_p = \frac{1}{p^2}$$

D'après le théorème de la double limite, la série $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^2}$ converge et :

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi :

$$n^2(u_n - \ell) = \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n) = \frac{\pi^2}{6} + o(1) \quad \text{et } u_n = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

EXERCICE 3

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et on rappelle que :

$$\forall\,(M,N) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2,\ \ (M\,N)^\top = N^\top\,M^\top$$

L'espace $E = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall\,(X,Y) \in E^2\,,\ \ (X|Y) = X^\top\,Y$$

et pour tout vecteur X de E , sa norme est notée $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$.
Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1.
On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est de type n lorsque $A^\top = A^n$.

1. **Quelques exemples**

   1.1. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 0.
   L'ensemble des matrices de type 0 est $\left\{I_p\right\}$.

   1.2. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1.
   Par définition, l'ensemble des matrices de type 1 est l'ensemble (espace) $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

   1.3. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type -1.
   Par définition, l'ensemble des matrices de type -1 est l'ensemble $\mathscr{O}_p(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales.
   En donner un exemple différent de la matrice identité lorsque $p = 4$.
   $-I_4$ convient.

   On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 1.

2. **Dans cette question et dans cette question uniquement**, on prend $p = 3$ et pour tout réel θ, on note :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   2.1. Démontrer que l'on a : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ (A(\theta))^m = A(m\,\theta)$.
   Récurrence immédiate mais à faire avec l'aide des formules d'addition pour les fonctions sin et cos !

   2.2. Déterminer alors l'ensemble des réels θ tels que $A(\theta)$ soit une matrice de type n.
   En remarquant $A^\top(\theta) = A(-\theta)$, on a :

$$A^\top(\theta) = A(\theta)^n \iff A((n+1)\theta) = I_p \iff (n+1)\theta \equiv 0\ [2\pi]$$

   L'ensemble des réels θ pour lesquels $A(\theta)$ est une matrice de type n est $\left\{\dfrac{2k\pi}{n+1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

   On revient au cas général : $p \geqslant 3$.

3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type n.

3.1. Établir l'égalité : $A^{n^2} = A$.

On a :

$$A^{n^2} = (A^\top)^n = (A^n)^\top = (A^\top)^\top = A$$

3.2. On note $B = A^{n+1}$.

3.2.1. Montrer que $B^n = B$.

On a :

$$B^n = A^{n^2+n} = A^{n+1} = B$$

3.2.2. Démontrer que B est une matrice symétrique.

On a :

$$B^\top = (A^{n+1})^\top = (A^\top)^{n+1} = (A^n)^{n+1} = \left(A^{n+1}\right)^n = B^n = B$$

B est symétrique.

3.2.3. Prouver que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.

On pourra examiner $X^\top BX$ où X est un vecteur quelconque de E.

Pour X dans E :

$$X^\top BX = X^\top A^{n+1}X = X^\top A^\top AX = (AX)^\top AX = \|AX\|^2$$

En particulier, si X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ, on obtient (X n'étant pas nul) :

$$X^\top BX = \lambda\|X\|^2 = \|AX\|^2 \quad \text{donc } \lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \in \mathbb{R}_+$$

Les valeurs propres de B sont (réelles) positives ou nulles.

3.2.4. Déterminer les valeurs propres de la matrice (B), lorsque B n'est ni la matrice nulle ni la matrice identité.

D'après la question **3.**(**3.2.**)**3.2.1.**, les valeurs propres de B sont racines de son polynôme annulateur $X^n - X$ et sont réelles positives.

Les valeurs propres de B appartiennent à $\{0, 1\}$. Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisable.

Si sa seule valeur propre était 0, ce serait la matrice nulle et si 1 était sa seule valeur propre, ce serait la matrice identité. Donc ses valeurs propres sont 0 et 1.

3.2.5. Prouver que B est une matrice de projection orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques.

B est symétrique réelle donc diagonalisable. Vues ses valeurs propres, B est semblable à la matrice $C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{p-r} \end{pmatrix}$ où r est le rang de C donc de B.

On a $C^2 = C$ donc C et B sont des matrices de projection.

D'après le théorème spectral, les sous espaces propres de B (qui sont $\ker(B)$ et $\mathrm{Im}(B)$) sont orthogonaux. Donc B est la matrice d'une projection orthogonale.
(Si $r = 0$, B est nulle et, si $r = p$, B est semblable à I_p donc $B = I_p$ et le résultat précédent reste valable).

3.3. Prouver que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.
Comme $B = A^{n+1}$, le noyau de A est contenu dans celui de B.
Pour X dans $\ker(B)$, on a :

$$X^\top BX = \|AX\|^2 = 0$$

d'après la question **3.(3.2.)3.2.3.**. Donc, X est dans $\ker(A)$.
Donc $\ker(A) = \ker(B)$.

3.4. Démontrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.
Comme $B = A^{n+1}$, l'image de B est contenue dans celle de A.
Comme $A^{n^2} = A$, l'image de A est contenue dans l'image de $B = A^{n+1}$ puisque $n^2 \geqslant n + 1$ (pour $n \geqslant -1$).
Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

3.5. Prouver que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.
Comme B est la matrice d'une projection orthogonale, $\ker(B)$ est l'orthogonal de $\mathrm{Im}(B)$. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3.6. Démontrer que l'on a : $\forall X \in \mathrm{Im}(A)$, $\|AX\| = \|X\|$.
Pour X dans $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$, on a $BX = X$ car B est la matrice d'une projection.
Donc, d'après la question **3.(3.2.)3.2.3.** :

$$\|X\|^2 = X^\top BX = \|AX\|^2$$

3.7. Prouver que si A est de plus inversible, alors A est aussi de type -1.
Si A est inversible, alors $B = A^{n+1}$ l'est aussi et, en tant que matrice d'une projection, $B = I_p$ d'où :

$$A^n = A^{-1} \quad \text{i.e. } A^\top = A^{-1}$$

Si A est inversible, alors A est aussi de type -1.

4. Prouver enfin que si A est à la fois de type n et de type $n + 1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.
Si A est de type n et $n + 1$, alors :

$$B = A^\top = A^{n+1} = A^n A = A^\top A$$

$A^\top$ est symétrique donc A également. Et $B = A^\top = A$.
Donc $A = B$ est la matrice d'un projecteur orthogonal (puisque A est de type n).

EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

Questions de cours

1. Pour tout θ dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est de module 1 et d'argument θ (modulo 2π).

2. Pour t réel et n entier :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\pi+t)} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = (-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

En prenant la partie imaginaire :

$$\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$$

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

3.1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge.

$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ est une série alternée vérifiant le théorème idoine donc converge.

3.2. Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum_{n\geqslant p}(-1)^n a_n$ converge.

$\sum_{n\geqslant p}(-1)^n a_n$ est le reste à l'ordre $p-1$ (ou la série complète pour $p = 0$) de la série précédente.
Elle converge donc.
On notera T_p sa somme.

3.3. Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
En tant que reste d'une série convergente, cette suite converge vers 0.

3.4. Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.
Le signe de T_p est celui de son premier terme : T_p est du signe de $(-1)^p$ (positif si p est pair, négatif sinon).

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.
On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
f étant continue sur $\mathbb{R}$ possède des primitives. En notant F celle qui s'annule en 0, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (puisque sa dérivée f y est continue). La fonction $G : x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la fonction composée $x \mapsto F\left(\sqrt{x}\right)$. La fonction racine carrée étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation :

$$\forall x > 0,\ G'(x) = \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

* * * * * *

5. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que si φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{i}\,\varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$.

5.1. Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé.

- Pour tout t dans $[0,1]$, la fonction $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$ donc intégrable ;
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$;
- De plus :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1],\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 1$$

  et la fonction constante $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$.

F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,t^2}\,\mathrm{d}t$$

5.2. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$F'(x) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Pour $x > 0$, en effectuant le changement de variable affine $t \mapsto u = t\sqrt{x}$, on obtient :

$$F'(x) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u$$

6. Convergence d'intégrales

6.1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergent.

La fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,\pi]$ et, pour u dans $]0,\pi]$:

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Or $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,\pi]$ donc, $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}$ l'est également ainsi que ses parties réelle et imaginaire.
Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergent.

6.2. En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

Les fonctions $u \mapsto e^{iu}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ sont de classe C^1 sur $[\pi, +\infty[$. Par intégration par parties et sous réserve de convergence :

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = \left[-i\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right]_{\pi}^{+\infty} - \frac{i}{2}\int_{\pi}^{+\infty} e^{iu}\, u^{-3/2} du$$

Le crochet possède bien des limites finies. Les deux intégrales sont donc de même nature. Or :

$$\left|e^{iu}\, u^{-3/2}\right| = u^{-3/2}$$

et la fonction $u \mapsto u^{-3/2}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

6.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

D'après les deux questions précédentes (et par somme), l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

6.4. Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{iv^2}\, dv$ converge.

En effectuant le changement de variable $u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto v = \sqrt{u} \in \mathbb{R}_+^*$ qui est C^1, strictement croissant et bijectif, on obtient la convergence de l'intégrale et l'égalité :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{iv^2}\, dv = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

7. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$.

7.1. Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

Pour $n \geqslant 1$, w_n existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment et w_0 est une intégrale de la question **6.1**.

7.2. On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n w_n$.

Prouver que α_n est un réel strictement positif.

On pourra effectuer sur w_n le changement de variable affine $t = u - n\pi$.

Pour u dans $[n\pi, (n+1)\pi]$, $\sin(u)$ est du signe de $(-1)^n$ d'après la question **2** (la fonction sin étant positive sur $[0, \pi]$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, α_n est positif ou nul.
Par intégration d'une fonction continue (ou prolongeable par continuité en 0 pour $n = 0$) ayant un signe constant et n'étant pas identiquement nulle, w_n est non nul.
Pour tout n, α_n est strictement positif.

7.3. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement de variable $t = u - n\pi$, on a (c.f. la question **2**) :

$$\alpha_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t$$

et :

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \int_0^\pi \sin(t)\left(\frac{1}{\sqrt{t+n\pi}} - \frac{1}{\sqrt{t+(n+1)\pi}}\right)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7.4. Prouver que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.

On pourra utiliser les questions de cours.

Pour $n \in N^*$:

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et, d'après la question **3.1**, la série alternée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge et (c.f. **3.2**) sa somme est positive.

7.5. Démontrer que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

La série étant convergente, la suite de ses sommes partielles converge et la somme partielle de rang $n \in \mathbb{N}$ est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

La convergence de l'intégrale permet de conclure : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

8. Montrer que pour tout x réel positif :

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$$

Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ G(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$$

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **4** et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(x) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u = F'(x)$$

Or :

$$F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} = G(0)$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2} \, \mathrm{d}u \right)^2$$

9. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

On pourra utiliser la question **6**.

Par convergence de l'intégrale et la valeur de la limite, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2} \, \mathrm{d}u \right)^2 = 0$$

En séparant parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} - 2 \int_0^{+\infty} \cos(u^2)\mathrm{d}u \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\mathrm{d}u = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(u^2)\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\mathrm{d}u = 0$$

D'où (les intégrales étant positives) :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Malheureusement, il me faut reprendre presque intégralement les remarques générales faites l'an dernier sur les copies :
- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.
Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
Rappelons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !
- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PSI.
- Signalons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.
Il nous a semblé en effet que beaucoup de candidats lisent de plus en plus approximativement l'énoncé, ce qui induit nombre d'erreurs facilement évitables : « donner sans démonstration » donne lieu à une démonstration, « démontrer par récurrence » ne donne pas lieu à une récurrence, etc...

- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PSI et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
En exemple, le Théorème du rang appliqué à une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ prend parfois des formes étranges : $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(A) + \dim(\text{Im}(A))$ ou encore, $\dim(A) = \dim(\text{Ker}(A) + \dim(\text{Im}(A))$!
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.
Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
On trouve encore trop d'équivalents à 0...
De plus, beaucoup de candidats ne manipulent pas correctement les quantificateurs, ce qui entraîne de grosses difficultés dans les démonstrations, voire des contradictions.
- Dans le même type d'erreurs, on constate une grande confusion dans beaucoup de copies entre variable et paramètre : cela occasionne de grosses erreurs en particulier dans les intégrales à paramètre. Il est par

ailleurs curieux de voir des candidats chercher un équivalent de la fonction à intégrer au voisinage de $+\infty$ alors que l'on intègre entre 0 et 1 !
Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $t^{p(n+1)} \underset{+\infty}{\sim}$ ne veut pas dire grand chose...
- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.
- Reste à signaler que les probabilités génèrent un refus de beaucoup de candidats : près de 30% des candidats n'abordent pas cet exercice : rappelons que nous posons systématiquement un exercice de probabilité.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés de la rigueur, une rédaction claire et lisible et une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction détaillée du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

Nous avons compilé un certain nombres d'erreurs constatées sur les copies qu'il nous semble important de signaler dans ce rapport afin d'espérer ne plus les rencontrer l'an prochain.

• **Exercice 1**.
- Question **1.** : Il est curieux de voir des valeurs du réel α qui dépend de i et de j.
Des candidats cherchent en vain la valeur de α sans utiliser le fait que la somme des probabilités vaut 1.
- Question **2.** : Il manque souvent des justifications dans ce qu'écrivent les candidats.
- Question **4.** : Ici encore, il est important de bien lire l'énoncé : certains candidats oublient de déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
- Question **7.** : Ne pas oublier de justifier ses réponses : $LC = \mathbf{tr}(B)$ sans justification.

• **Exercice 2**.
- Questions de cours :
Les correcteurs sont étonnés que la factorisation de $X^{n+1} - 1$ par $X - 1$ soit aussi peu connue.
Cela impactait énormément la question **3.2.**
Que d'erreurs dans l'ensemble de définition et dans la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$!
- Question **3.** : les équivalents sont parfois fantaisistes.

Le critère de Riemann prend des formes étranges : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge...

On a souvent vu : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t^k}$! !

Beaucoup d'imprécision dans la rédaction de la question **3.2.**

- Question **4.1.** : Certains candidats croient reconnaître une somme télescopique et forcent l'énoncé à rentrer dans leur cadre !

Nous constatons parfois une méconnaissance grave du cours sur les séries : le fait que $\forall\, t \in [0, 1]$, $\lim\limits_{p\to+\infty} g_p(t) = 0$ n'implique pas la convergence de la série !

Enfin, trop souvent, dans la somme des termes d'une série géométrique, le premier terme est oublié.

- Question **4.2.** : Globalement, beaucoup d'erreurs sur un calcul simple : pourquoi faire une intégration par parties pour intégrer une fonction polynôme ?

Il ne faut pas confondre limite et équivalent !

- Question **4.4.** : Trop souvent $|h_p(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^2}$ et donc, $|h_p(t)| \leqslant \frac{1}{p^2}$.

• **Exercice 3**.

- Question **1.1.** : Quelques bizarreries du style « A^0 est la matrice nulle » ou « A^0 est la matrice remplie de 1 ».
- Question **1.3.** : On voit rarement un exemple de matrice orthogonale !
- Question **2.1.** : Le raisonnement par récurrence pose toujours problème à certains candidats. L'hypothèse de récurrence étant : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ (A(\theta))^m = A(m\theta)$, il ne reste plus grand chose à démontrer.

Parfois, la propriété est démontrée pour quelques valeurs de l'entier naturel m, sans faire de récurrence...

L'initialisation est aléatoire : $m = 1$ ou $m = 2$!

- Question **2.2.** : La résolution du système $\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(n\theta) \\ \sin(\theta) = -\sin(n\theta) \end{cases}$ pose de gros problèmes.
- Question **3.2.3.** : La relation $X^\top BX \geqslant 0$ n'est souvent pas justifiée ou alors par « car B est une matrice symétrique ».
- Question **3.3.** : On a vu « $A^\top AX = 0 \Longrightarrow AX = 0$ car $A^\top \neq 0$! !

Enfin, beaucoup de candidats prouvent des inclusions d'ensembles en procédant par équivalences successives sans se poser de question.

• **Exercice 4**.

- Question **1.** : Que de réponses fantaisistes pour cette question de cours facile. Quelques exemples : l'argument de $e^{i\theta}$ vaut $\frac{\pi}{2}$, i, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou encore $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- Questidon **2.** : la trigonométrie semble bien oubliée. On voit proposés des raisonnement par récurrence faux qui n'aboutissent pas.
- Question **3.** : A part la sous-question **3.4.** c'est une question relativement bien traitée.
- Question **4.** : Trop souvent : « continue donc dérivable »
- Question **5.** : on lit $f(x, t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ sans préciser la variable.

On constate une grande confusion entre continuité et dérivation sous l'intégrale.

Malheureusement apparaissent des inégalités entre nombres complexes...

- Question **6.** : La continuité est souvent oubliée dans l'étude de la convergence d'intégrales.

Beaucoup d'intégrations par parties dans le mauvais sens : les candidats n'ont pas conscience qu'il est préférable de faire apparaître $\frac{1}{u\sqrt{u}}$ plutôt que $\sqrt{u}$ au voisinage de $+\infty$.

FIN

Luc VALETTE