e3a POLYTECH Épreuve spécifique PSI MATHEMATIQUES Corrigé

EXERCICE 1

---

1. (p_{ij}) est la loi du couple de variables aléatoires (X,Y), donc

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} p_{ij} = 1.$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} &= \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \binom{n}{k}\binom{n}{l} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\right)\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(1+1)^n\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^n \\
&= 2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
&= 2^{2n}
\end{aligned}$$

Donc $\alpha = \dfrac{1}{2^{2n}}$.

2. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Puisque $[X = i] = \bigsqcup_{j=1}^{n+1}[X = i] \cap [Y = j]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = i]) &= \sum_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\alpha\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}2^n \\
&= \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}
\end{aligned}$$

Par symétrie, pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\mathbb{P}([Y = j]) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}.$$

3. Oui : $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{n}{i-1}\dbinom{n}{j-1} = \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j]$.

4. Z est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}([Z=k]) = \mathbb{P}([X=k+1]) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{2^{n-k}}$: Z suit donc la loi binomiale de paramètres n et p, où $p = \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z+1) = \mathbb{E}(Z)+1 = 1+\dfrac{n}{2}$, et que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z+1) = \mathbb{V}(Z) = \dfrac{n}{4}$.

5. Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, $b_{ij} = \mathbb{P}([X=j]) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{j-1}$.

6. Les lignes de B sont toutes les mêmes, et B est non nulle : $\mathrm{rg}\,(B) = 1$ et

$$\mathrm{Im}(B) = \mathbb{R}\,.\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

   $\ker(B)$ est l'hyperplan de $M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ d'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k = 0$ dans la base canonique.

7. Si on note $C = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ et $L = \dfrac{1}{2^n}\left(1, \dbinom{n}{1}, \dbinom{n}{2}, \dots, \dbinom{n}{n}\right)$, on vérifie que $B = CL$.

8. $B^2 = C(LC)L = (LC)CL = (LC)B$, et $LC = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1} = \mathrm{tr}\,(\mathrm{B}) = 1$.

9. 0 est valeur propre de B d'odm au moins n, donc le polynôme caractéristique de B est scindé dans $\mathbb{R}$, et, puisque la somme de ses racines comptées avec leur odm vaut $\mathrm{tr}\,(\mathrm{B})$, on en déduit que 1 est valeur propre simple de B. Donc 0 est valeur propre d'odm n, et B est diagonalisable.

EXERCICE 2

Question de cours

1. $X^{n+1}-1 = (X-1)(X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1)$, donc le quotient vaut $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$ et le reste 0.
2. Conséquence du résultat précédent, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ converge SSI $|x| < 1$ et, pour tout complexe x de module strictement plus petit que 1, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

*****

3. **Étude d'une suite**

   3.1 La fonction $t \mapsto \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}} = \dfrac{1}{1+t+\dots+t^n}$ est définie et continue sur [0,1[, prolongeable par continuité en 1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t$ converge donc pour tout entier $n \in N^*$.

   3.2 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, et tout réel $t \in [0{,}1[$, on pose $f_n(t) = \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$.

   - Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est intégrable sur [0,1[, d'après la question précédente et la positivité de f_n.
   - La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur [0,1[vers la fonction affine $t \mapsto 1-t$, continue (par morceaux) sur [0,1[.
   - Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \in [0{,}1[$, $0 \leq f_n(t) = \dfrac{1}{1+t+\dots+t^n} \leq 1$, et la fonction $t \mapsto 1$, indépendante de n, est intégrable sur [0,1[.

   Le théorème de convergence dominée permet alors d'écrire :

$$u_n = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t \to \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\text{quand } n \to +\infty.$$

4. **Étude de la série de terme général** $u_n - l$

4.1 Soit $t \in [0,1]$.
Si $t = 0$, $g_p(t) = 1$ et la série $\sum_{p \geq 1} g_p(t)$ converge.
Si $t \in [0,1[$, la série $\sum_{p \geq 1} g_p(t)$ est une série géométrique de raison t^{n+1}, qui converge puisque $t^{n+1} \in [0,1[$.
Finalement, la série de fonctions $\sum_{p \geq 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et a pour somme la fonction $t \mapsto (1-t)t^{(n+1)} \times \dfrac{1}{1-t^{n+1}}$ si $t \in [0,1[$ et qui à 1 associe 0.

4.2 $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)t^{p(n+1)}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{p(n+1)}\mathrm{d}t - \int_0^1 t^{p(n+1)+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)p+1} - \frac{1}{(n+1)p+2} = \frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)} \sim \frac{1}{(n+1)^2p^2}$ quand $p \to \infty$.

4.3 Soit n un entier strictement positif.

$$\begin{aligned}
u_n - l &= \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-t^{n+1}} - (1-t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{n+1}\frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On applique ensuite le théorème d'intégration termes à termes des séries de fonctions intégrables : puisque $\displaystyle\int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)$ d'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{p \geq 1} \int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t$ converge, et $\displaystyle u_n - l = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)}$.

4.4 Soient $p \geq 1$ et $t \geq 0$. Puisque $((t+1)p+2) \geq tp$ et $((t+1)p+1) \geq tp$,

$$|h_p(t)| = \frac{t^2}{((t+1)p+2)((t+1)p+1)} \leq \frac{1}{p^2},$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\sum_{p \geq 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

4.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle n^2(u_n - l) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n^2}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n)$.
On utilise alors le théorème de la double limite. Puisque la série de fonctions $\sum_p h_p$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$, et que chaque fonction h_p tend vers $\dfrac{1}{p^2}$ en $+\infty$, alors $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} h_p(t) \to \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$ quand $t \to +ìnfty$, et par conséquent $n^2(u_n - l) \to \dfrac{\pi^2}{6}$ quand $n \to +\infty$.
On en déduit alors que

$$u_n = l + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

EXERCICE 3

1. **Quelques exemples**

1.1 La seule matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de type 0 est I_p.

1.2 Les matrices de $M_p(\mathbb{R})$ de type 1 sont les matrices symétriques.

1.3 Enfin, les matrices de $M_p(\mathbb{R})$ de type -1 sont les matrices orthogonales.

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

2. 2.1 Cela se fait par exemple par récurrence sur m, à partir de la formule démontrée en cours pour les matrices d'ordre 2 :

$$A(\theta) \times A(\theta') = A(\theta + \theta').$$

2.2 On cherche θ tel que $A(n\theta) = A(\theta)^T = A(-\theta)$. Cela s'écrit $\cos(n\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(n\theta) = -\sin(\theta)$, ou encore $e^{in\theta} = e^{-i\theta}$: il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = -\theta + 2k\pi$, soit $\theta = \dfrac{2k\pi}{n+1}$.

On revient au cas général avec $p \geq 3$.

3. Soit A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de type n.

3.1 Puisque $A^T = A^n$, $A = (A^T)^T = (A^n)^T = (A^T)^n = (A^n)^n = A^{n^2}$.

3.2 On note $B = A^{n+1}$.

3.2.1 $B^n = (A^{n+1})^n = A^{n^2+n} = A \times A^n = A^{n+1} = B$.

3.2.2 $B = A^n A = A^T A$, donc B est une matrice symétrique.

3.2.3 Soit (λ, X) un couple (valeur propre, vecteur propre) de B.
$X^T B X = X^T A^T A X = \|AX\|^2 \geq 0$. Comme $X^T B X = \lambda \|X\|^2$, on en déduit que $\lambda \geq 0$: B est une matrice symétrique réelle positive.

3.2.4 Ses valeurs propres sont des réels positifs, racines du polynôme $X^{n+1} - X$, puisque ce polynôme est annulateur de B : $\mathrm{Sp}(B) \subset \{0,1\}$, et puisque B est diagonalisable, lorsque B n'est ni la matrice nulle, ni la matrice I_p, $\mathrm{Sp}(B) = \{0,1\}$.

3.2.5 B est donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale dont l'ensemble des éléments diagonaux est exactement $\{0,1\}$. Cela caractérise les matrices de projections orthogonales.

3.3 Si $X \in \ker(B)$, alors $BX = 0$, donc $A^T A X = 0$, et $X^T A^T A X = \|AX\|^2 = 0$: $X \in \ker(A)$.
Réciproquement, si $X \in \ker(A)$; $AX = 0$ et $A^T A X = 0$: $X \in \ker(B)$.
Donc $\ker(B) = \ker(A)$, et $\mathrm{Im}(B) = \ker(A)^{\perp}$.

3.4 Puisque $\ker(B) = \ker(A)$, A et B ont le même rang. Or $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(A)$. Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

3.5 Comme B est une matrice de projection orthogonale, $\mathrm{Im}(B)$ et $\ker(B)$ sont supplémentaires orthogonaux et $\mathrm{Im}(A)$ et $\ker(A)$ sont aussi supplémentaires orthogonaux.

3.6 Soit $X \in \mathrm{Im}(A)$. Alors $X \in \mathrm{Im}(B) = \ker(B - I_p)$: $X = BX$.
Donc $\|X\|^2 = X^T X = X^T B X = X^T A^T A X = \|AX\|^2$.

3.7 Si A est de plus inversible, alors $\mathrm{Im}(A) = E$, et A conserve la norme : A est une matrice d'isométrie, c'est-à-dire une matrice orthogonale, ou encore une matrice de type -1 comme vu en début de problème.

4. Si A est à la fois de type n et de type $n+1$, alors $A^n = A^{n+1}$, et on montre par récurrence sur k que, pour tout entier naturel k, $A^{n+k} = A^n$.

En particulier $A^{2n} = A^n$, ce qui s'écrit aussi $(A^T)^2 = A^T$, et, par transposition, $A^2 = A$: A est une matrice de projection, orthogonale puisque $\mathrm{Im}(A)$ et $\ker(A)$ sont supplémentaires orthogonaux d'après la question 3.

EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

Question de cours

1. Module 1, un argument est θ.

2. Par disjonction des cas "n pair", "n impair".
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.
   3.1 La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ est une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère spécial de convergence des séries alternées : la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.
   3.2 Les sommes partielles de cette série diffèrent des sommes partielles de la précédente d'une constante additive. Puisque la précédente converge, la série $\sum_{n\geq p}(-1)^n a_n$ converge.
   3.3 T_{p+1} est le reste d'indice p de la série convergente $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$: la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.
   3.4 Conséquence du CSCSA, T_p est du signe de son premier terme, soit du signe de $(-1)^p$.
4. Notons g une primitive de f sur $\mathbb{R}$. g est une fonction dérivable, dont la dérivée est f. C'est donc une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x>0$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t = g(\sqrt{x})-g(0)$. La fonction $x\mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t$ est donc à constante additive près la composée de g et de la fonction racine carrée, elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et, pour tout $x>0$, sa dérivée en x vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}g'(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})$.

*****

5. 5.1 On applique ici le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale.
   - Pour tout réel x, la fonction $t\mapsto \dfrac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.
   - Pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $x\mapsto \dfrac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto ie^{ix(1+t^2)}$.
   - Pour tout réel x, la fonction $t\mapsto ie^{ix(1+t^2)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.
   - Pour tout couple $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}$, $\left|ie^{ix(1+t^2)}\right| = 1$, et la fonction $t\mapsto 1$, indépendante de x, est intégrable sur le segment $[0,1]$.

   Par conséquent, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = \displaystyle\int_0^1 ie^{ix(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

   5.2 Pour tout réel $x>0$, $F'(x) = ie^{ix}\displaystyle\int_0^1 ie^{ixt^2}\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variables $u=\sqrt{x}\,t$, affine, dans l'intégrale, et on obtient
$$F'(x) = \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u.$$
6. **Convergence d'intégrales**
   6.1 Les fonctions $u\mapsto \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ et $u\mapsto \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}}$ sont définies et continues sur $]0,\pi]$.

   La première se prolonge par continuité en 0, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

   La seconde est équivalente en 0 à $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$. Puisque $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge (intégrale de Riemann sur un intervalle borné, d'exposant strictement plus petit que 1), par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

   6.2 Puisque $\dfrac{-ie^{iu}}{\sqrt{u}}$ admet une limite finie en $+\infty$, le théorème d'IPP permet d'affirmer que les intégrales $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{ie^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ sont de même nature.

   Or $\left|\dfrac{ie^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\right| = \dfrac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ converge (Riemann sur un intervalle non borné, exposant >1).

   Par comparaison, $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{ie^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ converge, et $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

6.3 Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge, car $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge comme combinaison linéaire des deux intégrales étudiées à la question 6.1, et $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

6.4 On effectue le changement de variables C^1 et strictement croissant $u = v^2$ dans l'intégrale précédente, qui s'écrit aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iu}2\mathrm{d}(\sqrt{u})$. On obtient l'intégrale $\displaystyle 2\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\mathrm{d}v$, qui est donc convergente.

7. 7.1 w_0 est l'intégrale étudiée en 6.1, les autres sont des intégrales d'une fonction continue sur des segments.

7.2 Par le changement de variables indiqué, $\displaystyle w_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t+n\pi)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t$, et $\displaystyle\alpha_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t$ est un réel positif.

7.3 Pour tout entier naturel n, et tout réel $t \in [0,\pi]$, $\displaystyle\frac{\sin(t)}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \leq \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}$. Par croissance de l'intégrale, $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.
Ainsi la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

7.4 D'après ce qui précède, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$ est une série alternée et, pour appliquer le critère spécial, il suffit de vérifier que $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
Or $\displaystyle 0 \leq \alpha_n \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{n\pi}\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi} \to 0$.
Finalement, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$ converge, et le signe de sa somme est celui du premier terme de la série, à savoir positif.

7.5 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge, comme partie imaginaire de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.
Pour tout entier naturel N, par la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} w_n = \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.
Par passage à la limite quand $N \to \infty$, il vient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

8. Pour tout réel $x > 0$, notons $\displaystyle G(x) = i\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$. D'après la question 4, G est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $\displaystyle G'(x) = \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u = F'(x)$.
Donc il existe un réel K tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = G(x) + K$.
Enfin, $\displaystyle K = F(0) - G(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.
Finalement, $\displaystyle F(x) = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$.

9. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u$ converge, d'après la question 6, par passage à la limite dans la formule précédente, et en admettant que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, il vient : $\displaystyle 0 = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$.
On en déduit que $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2 = i\frac{\pi}{4}$, puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
Ensuite, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$ convergent comme partie réelle et partie imaginaire de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u$.
Donc il existe $\epsilon \in \{-1,1\}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \epsilon\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ est un réel positif d'après la question 7, donc

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Il s'agit des intégrales de Fresnel.

FIN