Quatre exercices

À rendre le mardi 12 mars 2024 dernier délai.

Rédigez entre 0 et 4 exercices !

1 Sur les auto-adjoints

On donne deux énoncés essentiellement équivalents, selon qu'on travaille sur un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E, ou qu'on travaille sur des matrices symétriques réelles :

— si $u \in \mathcal{S}_E$ a pour valeurs propres ordonnées comptées avec multiplicité $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ alors :

$$\forall x \in E \qquad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x)|x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

— Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a pour valeurs propres ordonnées comptées avec multiplicité $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ alors :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \lambda_1 \|X\|^2 \leqslant \langle X|AX\rangle \leqslant \lambda_n \|X\|^2$$

$\|X\|^2$ étant à prendre au sens de $X^{\mathrm{T}}X$ et $\langle X|Y\rangle$ au sens de $X^{\mathrm{T}}Y$

Il vous est demandé, au choix, de :

— prouver uniquement le premier ;
— prouver uniquement le deuxième ;
— prouver le premier et en déduire le deuxième ;
— prouver le deuxième et en déduire le premier.

Pour l'éventuel passage du géométrique au matriciel le point clé à bien rédiger sera évidemment la géométrisation, puisqu'on dispose au départ seulement d'une matrice réelle.

2 Matrices de Gram

Soit E un espace euclidien. Pour $v_1, ..., v_p \in E$, on définit :

$$\mathcal{G}(v_1, ..., v_p) = ((\langle v_i|v_j\rangle))_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

1. Montrer que si $(v_1, ..., v_p)$ est liée, alors $\det(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p)) = 0$.
2. Montrer la réciproque.
3. Montrer que si $x \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$ (avec $(v_1, ..., v_p)$ libre), alors :

$$d(x, F)^2 = \frac{\det(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p, x))}{\det(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p))}$$

Pour la deuxième question, on pourra supposer (après avoir dit pourquoi !) que la dernière colonne est combinaison linéaire des autres, disons $C_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k C_k$*, et dire ce que ça révèle sur* $v_p - \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k$*. Pour la dernière, après avoir fait un dessin on écrira* $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k + g$ *avec* $g \in F^{\perp}$ *et on réalisera une opération raisonnable dans* $\det(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p, x))$*.*

3 Une équation différentielle linéaire

Intégrer sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$tx' - (1+t)x = \frac{t^2}{\cosh t}\cdot$$

4 Un système différentiel

Résoudre :

$$\begin{cases} x' = & & & 2y & + & 2z \\ y' = & -x & + & 2y & + & 2z \\ z' = & -x & + & y & + & 3z \end{cases}$$

On commencera par réduire soigneusement, et en limitant les calculs, la matrice à laquelle on pense.