Quatre exercices

1 Sur les auto-adjoints

1. Supposons que $u \in \mathcal{S}_E$ a pour valeurs propres ordonnées comptées avec multiplicité $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et fixons $x \in E$.
D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{F}$ de diagonalisation de u :
$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$
On décompose x dans cette base : $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$. On a alors
$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u(f_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k f_k,$$
et puisque la base $\mathcal{F}$ est orthonormée, le produit scalaire se calcule simplement :
$$\langle u(x)|x\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k f_k | \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2$$
Il reste à noter que (les α_k^2 étant positifs) on a pour tout k : $\lambda_1 \alpha_k^2 \leqslant \lambda_k \alpha_k^2 \leqslant \lambda_n \alpha_k^2$. On somme tout ceci et on utilise enfin (toujours grace au fait que $\mathcal{F}$ est orthonormée) : $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|x\|^2$, et finalement :
$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x)|x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

2. Supposons que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a pour valeurs propres ordonnées comptées avec multiplicité $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et fixons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
(Je réalise au moment d'écrire le corrigé que pour des raisons d'homogénéïté il aurait été plus malin de parler de $\langle AX|X\rangle$; bon...)
D'après le théorème spectral il existe $P \in {}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = D$. On a alors :
$$\langle X|AX\rangle = X^{\mathrm{T}} AX = X^{\mathrm{T}} PAP^{-1}X$$
On notant $Y = P^{-1}X$ on a $Y^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}}P$ (puisque P est orthogonale) donc
$$\langle X|AX\rangle = Y^{\mathrm{T}} DY = \cdots = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$$
Il reste à noter que $\|X\|^2 = \|PX\|^2 = \langle PX|PX\rangle = \cdots = \|Y\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2$ et finir comme dans la première preuve pour l'encadrement.

3. Supposons maintenant avoir démontré la version géométrique et prouvons la version matricielle. On prend donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de spectre ordonné $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ainsi que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A : puisque sa matrice dans la base canonique (qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique qu'on choisit) est symétrique, u est lui-même symétrique, de même spectre que A. Si on note x le vecteur de coordonnées X dans $\mathcal{E}$, la version géométrique prouvée nous dit que
$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x)|x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

Mais la base $\mathcal{E}$ étant orthonormée, les produits scalaires et normes se calculent simplement via les matrices coordonnées de x (à savoir X) et de $u(x)$ (à savoir AX), ce qui nous donne exactement le résultat attendu :

$$\lambda_1 \|X\|^2 \leqslant \langle X|AX\rangle \leqslant \lambda_n \|X\|^2$$

4. Supposons maintenant avoir établi la version matricielle et montrons la version matricielle. On prend donc u comme on imagine. On fixe UNE base orthonormée (certainement pas canonique : ça n'a pas de sens pour E inconnu). La matrice A de u dans cette base est symétrique réelle, et si on note X les coordonnées de x dans cette base, alors le spectre de A est celui de u, donc l'encadrement
$$\lambda_1 \|X\|^2 \leqslant \langle X|AX\rangle \leqslant \lambda_n \|X\|^2$$
se traduit (puisque $\mathcal{E}$ est orthonormée) exactement comme on souhaitait, à savoir :
$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x)|x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

2 Matrices de Gram

1. Supposons $(v_1, ..., v_p)$ liée : l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. On ne nuit donc pas à la généralité en supposant : $v_p = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k$. Mais on a alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$: $\langle v_i|v_p\rangle = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k \langle v_i|v_k\rangle$, ce qui signifie précisément que les colonnes $C_1, ..., C_p$ de $\mathcal{G}(v_1, ..., v_p)$ vérifient : $C_p = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k C_k$, donc le déterminant de $\mathcal{G}(v_1, ..., v_p)$ est nul.
2. Réciproquement, supposons le déterminant nul. La matrice de Gram est donc non inversible, donc il existe une colonne qui est combinaison linéaire des autres. Ce n'est pas forcément la dernière, mais on ne nuit pas à la généralité en le supposant. Il existe alors des λ_k tels que $C_p = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k C_k$, ce qui se traduit par $\langle v_i|v_p\rangle = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k \langle v_i|v_k\rangle$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, soit encore en notant $v = v_p - \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k$: « v est orthogonal à tous les v_i ». Il est donc orthogonal à toutes leurs combinaisons linéaires, donc à lui-même... donc est nul : la famille $(v_1, ..., v_p)$ est bien liée.
3. Suposons que $x \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$ avec $(v_1, ..., v_p)$ libre. On décompose x selon $F \oplus F^\perp$: $x = f + g$ avec donc $x \in F$ et $g \in F^\perp$, et on a alors $d(x, F) = \|g\|$.
   Avec la décomposition $f = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$ on a très envie de réaliser l'opération $C_{p+1} \leftarrow C_{p+1} - \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k C_k$ dans $\det\left(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p, x)\right)$, ce qui fait apparaître des $\langle v_i|x - f\rangle = \langle v_i|g\rangle = 0$ sur toute la dernière colonne, sauf en bas à droite où on trouve $\langle x|g\rangle = \langle f + g|g\rangle = \langle f|g\rangle + \langle g|g\rangle = \|g\|^2$ (mais oui : regardez mieux le dessin !). Ainsi :
$$\boxed{\det\left(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p, x)\right) = d(x, F)^2 \det\left(\mathcal{G}(v_1, ..., v_p)\right)}$$

3 Une équation différentielle linéaire

Sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'agit d'une équation différentielle homogène d'ordre 1 « résolue » (au sens : de la forme $x' = ax + b$) :
$$x' = \frac{1+t}{t}x + \frac{t}{\cosh t}.$$
Ici, $a(t) = \dfrac{t+1}{t} = 1 + \dfrac{1}{t} = (t + \ln(t))'$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme
$$t \mapsto K\mathrm{e}^{t+\ln t} = Kt\mathrm{e}^t$$
avec K une constante.

On cherche ensuite UNE solution particulière en posant $X(t) = K(t)te^t$ avec K une fonction de classe $\mathcal{C}^1$: on a alors

$$X'(t) = ... = \frac{1+t}{t}X(t) + K'(t)te^t,$$

de sorte que pour que X soit solution de l'équation initiale, il SUFFIT d'avoir :

$$\forall t > 0 \qquad K'(t) = \frac{e^{-t}}{\cosh t} = \frac{2}{e^{2t}+1} = 2 - \frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1} = \left(2t - \ln\left(1+e^{2t}\right)\right)' \cdot$$

Ainsi UNE solution particulière est $t \mapsto \left(2t - \ln\left(1+e^{2t}\right)\right)te^t$ et LES solutions de l'équation initiale sont les applications

$$t \mapsto \left(K + 2t - \ln\left(1+e^{2t}\right)\right)te^t$$

où K décrit $\mathbb{R}$.

4 Un système différentiel

Le système s'écrit $X' = AX$ avec A et X comme on pense. La matrice A a pour polynôme caractéristique

$$\chi_A = \cdots = (X-1)(X-2)^2$$

donc est au moins trigonalisable : semblable à une matrice avec 1, 2 et 2 sur la diagonale (ce qui est rassurant au regard de la trace). On a bien entendu $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ de dimension 1, porté (en regardant droit dans les yeux $A - I_3$ ou en résolvant $(A - I_3)X = 0$) par $v_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ (ou $(2, 0, 1)$ si on veut parler de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A). Drame : $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ est de dimension 1 (on voit tout de suite que $A - 2I$ n'est pas de rang 1, donc est forcément de rang 2 ; pourquoi ?). Pus précisément, il est dirigé (calcul...) par $v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Pour trigonaliser A, il suffit de compléter (v_1, v_2) en une base, en prenant tout vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ces deux vecteurs ; par exemple $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (le rang de (v_1, v_2, v_3) se trouve en une opération élémentaire : faites le !). Mais attention, la matrice de u dans cette nouvelle base serait certes triangulaire, mais avec potentiellement 3 éléments non nuls sur la dernière colonne. On va donc préférer prendre v_3 dans $\operatorname{Ker}\left((A - 2I_3)^2\right)$. Ce dernier sous-espace est stable par A : u et contient bien entendu $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ donc v_2, mais aussi (après calcul de $(A - 2I_3)^2$) : $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Pour le changement de base : on a bien entendu $u(v_1) = v_1$ et $u(v_2) = 2v_2$, mais aussi :

$$u(v_3) = u(e_1) = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -v_2 + 2v_3,$$

donc en posant $P = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ on obtient : $P^{-1}AP = \operatorname{Mat}(u, \mathcal{V}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} = T.$

Le système initial devient :

$$X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff (P^{-1}X)' = T(P^{-1}X)$$

de sorte qu'en posant $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, le système initial est ÉQUIVALENT à $Y' = TY$, soit encore :

$$\begin{cases} x_1' &= & x_1\\ y_1' &= & 2y_1 + z_1\\ z_1' &= & 2z_1\end{cases}$$

Ceci est équivalent à l'existence de deux constantes K_1 et K_3 telles que $x_1 = K_1\mathrm{e}^t$, $x_3 = K_3\mathrm{e}^{2t}$ (la quantification partielle/défaillante est volontaire) et $x_2' = 2x_2 + K_3\mathrm{e}^{2t}$.
Pour cette dernière équation linéaire d'ordre 1, les solutions de l'équation homogène associée sont connues, et UNE solution particulière se trouve au choix par variation de la constante, par bricolage/tâtonnements, ou « tombée du camion » : $t \mapsto K_3 t\mathrm{e}^{2t}$ fait le job ! On trouve ainsi $Y(t) = \begin{pmatrix} K_1\mathrm{e}^t \\ K_2\mathrm{e}^{2t} + K_3 t\mathrm{e}^{2t} \\ K_3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$ et on reconstruit ensuite les solutions du système initial :

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 2K_1\mathrm{e}^t + 2(K_2\mathrm{e}^{2t} + K_3 t\mathrm{e}^{2t}) + K_3 t\mathrm{e}^{2t} \\ K_2\mathrm{e}^{2t} + K_3 t\mathrm{e}^{2t} \\ K_1\mathrm{e}^t + K_2\mathrm{e}^{2t} + K_3 t\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2K_1\mathrm{e}^t + (2K_2 + 3K_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ (K_2 + K_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ K_1\mathrm{e}^t + (K_2 + K_3 t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$