Psi 999 – 2023/2024 ψ **Programme de khôlle**

Khôlles : quinzaine numéro 10

Du 18 au 29 mars 2024

Dernière quinzaine avant les écrits !
Petit rappel : la façon la plus simple de s'assurer qu'on ne fera pas 5/2, c'est de sécher les colles. À bon entendeur...

1 Première semaine : EDL et espaces vectoriels normés

Sur les espaces vectoriels normés, un objectif majeur est de savoir montrer qu'une partie est fermée/ouverte et/ou bornée.

- EDL : tout type d'exercice. Raccords, systèmes linéaires, solutions développables en séries entières...
- Espaces vectoriels normés : normes, boules, convexes, ouverts et fermés.
  Ce qui suit est à partir du mercredi 20.
- Convergence des suites. Caractérisation séquentielle des fermés.
- Limite d'une fonction en un point adhérent, continuité. Propriétés opératoires.
- En dimension finie : toutes les normes sont équivalentes ; la convergence d'une suite est équivalente à la convergence des coordonnées ; la continuité d'une fonction est équivalente à la continuité de ses applications coordonnées ; une fonction continue définie sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes. les applications linéaires, bilinéaires, lipschitziennes sont continues.

2 Deuxième semaine : espaces vectoriels normés et calcul différentiel

- Les applications partielles d'une application continue sont continues, mais la réciproque est fausse.
- Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{R}^n$. Gradient si on arrive dans $\mathbb{R}$, différentielle. Propriétés opératoires.
- Composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

3 Questions de cours

- (S1) Si $u \in \mathcal{S}_E$ a ses valeurs propres positives, alors il existe $v \in \mathcal{S}_E$ dont les valeurs propres sont positives et tel que $v^2 = u$.
- (S1) Méthode de la variation de la constante pour prouver que si a et b sont continues sur I, alors l'équation $y' = ay + b$ possède au moins une solution.
- (S1+S2) Révision : la formule de Taylor avec reste intégral ! (formule et preuve par récurrence).
- (S1+S2) $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (S2) Unicité de la limite, pour une suite convergente d'un espace vectoriel normé.
- (S2) Si f est continue de E dans $\mathbb{R}$, alors $\{x \in E;\ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E. Variantes.